自由擬無限分解可能分布について

堀田一敬 (山口大工), Wojciech Mlotkowski(Wroclaw Univ.), 植田優基（北海道教育大教育）との共同研究

佐久間紀佳

http://nsakuma.com/

2021 年 6 月 18 日

16:30 から 18:00

愛知教育大学数学教育講座

自由確率論クイックレヴュー

自由擬無限分解可能分布

自由擬無限分解可能分布の例

擬無限分解可能分布

- A. Lindner, L. Pan and K. Sato (2018) On quasi-infinitely divisible distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **370**, 8483–8520.
  A quasi-infinitely divisible distribution on $\mathbb{R}$ is a probability distribution whose characteristic function allows a Lévy-Khintchine type representation with a "signed Lévy measure", rather than a Lévy measure.

$$\underbrace{\log\left(\int_{\mathbb{R}} e^{izt}\mu(\mathrm{d}t)\right)}_{:=\log(\widehat{\mu}(z))} = -\frac{a}{2}z^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{izt} - 1 - izt1_{[-1,1]}(t))\nu(\mathrm{d}t),\ z \in \mathbb{R}$$

- 古くは Gnedenko and Kolmogorov(1968, p.51), Cuppens(1975), Linnik and Ostrov'skiĭ(1977, Chap. 6 §7) に多次元の場合も含め, 取り扱いがある.
- 近年多くの場面で具体例が発見されている.

- A. Lindner and K. Sato (2011)
- Aoyama and Nakamura
- Demni
-

動機

- ベルコビッチ・パタ全単射の拡張
  Bożejko 氏からの質問

- Lindner, Pan and Sato の自由版

自由確率論クイックレヴュー

自由確率論クイックレヴュー: 非可換確率空間

非可換確率論は作用素環の言葉でその設定を書く.

- $(\mathcal{A}, \tau)$: ある単位元 $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ をもつ vN 環 $\mathcal{A}$ とその上の忠実な正規トレース状態 τ で $\tau(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ の組.
- 可換な例になってしまうが, $(L^\infty(\Omega, \mathbb{P}), \int_\Omega \cdot \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega))$ の組を浮かべると良い.
- vN 環 $\mathcal{A}$ は確率変数の集合, その上の忠実な正規トレース状態 τ は期待値写像と考える.
- トレース状態であるから $X, Y \in \mathcal{A}$ に対して

$$\tau(XY) = \tau(YX), \tau(XYXY) = \tau(YXYX)$$

などは成り立つが

$$\tau(XYXY) = \tau(X^2 Y^2)$$

とは出来ない.

自由確率論クイックレヴュー: 自由独立性

以下ではラフに自由確率論を説明する:

- 自由確率論 $=$ 非可換確率論 $+$ 自由独立性
- 非可換確率論: 確率変数の積について非可換性を課した確率論. $XY \neq YX$
- 自由独立性: $\{X_k\}$ が自由独立であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathring{X}_k := X_k - \tau(X_k)$, $i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(n)$ を満たすとき,

$$\tau(\mathring{X}_{i(1)}\mathring{X}_{i(2)}\cdots\mathring{X}_{i(n)}) = 0$$

  が常に成立することである.
- ちゃんとこれらのことを述べるためには作用素環 (フォン・ノイマン環$+\alpha$) の枠組が必要.
- ただ多くの場合そこまで難しい事は必要ない.
- 多くの応用 (ランダム行列のスペクトル分布) はほとんど台がコンパクトな分布しか出てこない.

自由確率論クイックレヴュー: 自由畳込み

- $\mathcal{P} := \{\mu \mid \mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 $\}$
- $\boxplus$: 自由 (加法的) 畳込み
  X, Y を自由独立な非可換確率変数とする. $X \sim \mu$, $Y \sim \rho$ とすると, $\mu \boxplus \rho$ は $X + Y$ の分布を生成する演算.
- μ が自由無限分解可能とは次が成立すること: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mu_n \in \mathcal{P}$ s.t.

$$\mu = \mu_n^{\boxplus n}.$$

  $I(\boxplus) := \{\mu \mid \mathbb{R}$ 上の自由無限分解可能分布 $\}$
- これらの取り扱いは
  - 解析的手法 (コーシー変換, ヴォイクレスク変換, R(自由キュムラント) 変換)(Mingo and Speicher の本を参照すると良い)
  - 組合せ論的手法 (Nica and Speicher の本を参照すると良い)

  で取り扱う.

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 1

- $\mu \in \mathcal{P}$ のコーシー変換 $G_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$;

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\mu(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

- $\mu \in \mathcal{P}$ の逆数コーシー変換 $F_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$;

$$F_\mu(z) := 1/G_\mu(z).$$

これは Pick 関数である.

自由確率論クイックレヴュー: Pick 関数

- $\mathcal{M}_f := \{$ 有限ボレル測度 $\}$

定理 1.1

$F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ が解析的で

$$\lim_{y\to\infty} \frac{F(iy)}{iy} = 1$$

をみたす

$\iff \exists 1\mu \in \mathcal{P}$ s.t. $F = F_\mu$ on $\mathbb{C}^+$

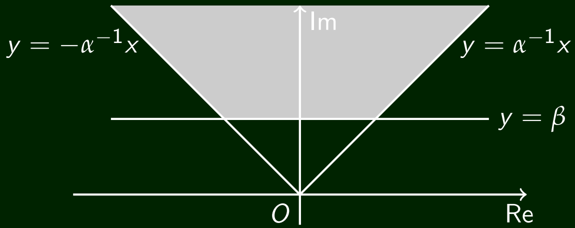
$\iff \exists 1 a \in \mathbb{R}, \rho \in \mathcal{M}_f$ s.t. $F = F_\mu$ on $\mathbb{C}^+$.

$$F(z) = a + z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tz}{t-z}\rho(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+$$

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 2

- F_μ は ∞ 周りの制限されたある領域 $\Gamma_{\alpha,\beta}$ で単葉 (univalent). よって, F_μ の逆写像 $F_\mu^{\langle -1 \rangle}$ が定義できる.

$$\Gamma_{\alpha,\beta} := \{z = x + iy : y > \beta, |x| < \alpha y\}$$



ここで, $\alpha > 0, \beta > 0$ は分布により取れる値は変わる.

- $\mu \in \mathcal{P}$ のヴォイクレスク変換 $\varphi_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$:

$$\varphi_\mu(z) = F_\mu^{\langle -1 \rangle}(z) - z, \quad z \in \Gamma_{\alpha,\beta} \tag{1}$$

- 適切な $\alpha > 0, \beta > 0$, $\mu, \rho \in \mathcal{P}$ に対して, $\varphi_{\mu \boxplus \rho}(z) = \varphi_\mu(z) + \varphi_\rho(z), \quad z \in \Gamma_{\alpha,\beta}$

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 3

- $\mu \in \mathcal{P}$ の R 変換 $R_\mu : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$;

$$R_\mu(z) = zF_\mu^{\langle -1 \rangle}(z^{-1}) - 1 = z\varphi_\mu(z^{-1}), \quad z^{-1} \in \Gamma_{\alpha,\beta}$$

- $\mu \in \mathcal{P}$ が自由無限分解可能 $\iff$ $\exists 1 b \in \mathbb{R}, \rho \in \mathcal{M}_f$ s.t.

$$\varphi_\mu(z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+. \tag{FLKVoi}$$

$\iff$ $\exists 1 a \geqq 0, \gamma \in \mathbb{R}, \nu$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上のレヴィ測度 s.t.

$$R_\mu(z) = az^2 + \gamma z + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - zt\mathbb{1}_{[-1,1]}(t) \right) \nu(\mathrm{d}t), \ z \in \mathbb{C}^-.$$

主値

写像

$$z \mapsto \sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z))$$

は $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ に対する主値とする.

すなわち偏角の主値を

$$\mathrm{Arg}(z) \in (0, 2\pi)$$

とする.

例: 半円分布

(FLKVoi) において $b=0$, $\tau=\sigma^2\delta_0$ の場合:

$$\varphi_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(\omega)=\frac{\sigma^2}{\omega},\ F^{\langle -1\rangle}_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(\omega)=\frac{\sigma^2}{\omega}+\omega$$

である. $\omega=F_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)$ を考えると,

$$z=\frac{\sigma^2}{F_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)}+F_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)\iff F_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)^2-zF_\mu(z)+\sigma^2=0$$

となり

$$F_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)=\frac{z+\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2},\quad G_{\mathsf{S}(0,\sigma^2)}(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2}$$

を得る. スティルチェス逆変換公式より $\mathsf{S}(0,\sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\operatorname{Im}G_\mu(x+iy)=\frac{1}{\pi}\sqrt{4\sigma^2-x^2}\mathbb{1}_{[-2\sigma,2\sigma]}(x)$$

例: 自由ポアソン分布 (マルシェンコ・パスツール分布)

$$\varphi_{\mathrm{m}_\lambda}(z) = \frac{\lambda z}{z-1} = \frac{\lambda}{2} + \int \frac{1+tz}{z-t}\frac{\lambda}{2}\delta_1(\mathrm{d}t), \quad F_{\mathrm{m}_\lambda}^{\langle -1 \rangle}(\omega) = \frac{\lambda\omega}{\omega-1} + \omega$$

を考える．その F 変換は

$$F_{\mathrm{m}_\lambda}(z) = \frac{(z+1-\lambda) - \sqrt{(z+1-\lambda)^2 - 4z}}{2}$$

となる．このとき, そのコーシー変換は

$$G_{\mathrm{m}_\lambda}(z) = \frac{(z+1-\lambda) + \sqrt{(z+1-\lambda)^2 - 4z}}{2z}$$

となる．スティルチェス逆変換公式よりその確率分布 m_λ は

$$\begin{aligned}\mathrm{m}_\lambda(\mathrm{d}x) = &\max\{1-\lambda, 0\}\delta_0(\mathrm{d}x) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{4\lambda - (x-1-\lambda)^2}}{x}1_{[(1-\sqrt{\lambda})^2, (1+\sqrt{\lambda})^2]}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

例: コーシー分布

$a > 0$ とする. (FLKVoi) において $b = 0$, $\tau(\mathrm{d}t) = \frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}$ の場合:

$$\varphi_{C_a}(\omega) = -ai = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\omega t}{\omega - t} \frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}, \ F_{C_a}^{\langle -1 \rangle}(\omega) = \omega - ai$$

なので

$$F_{C_a}(z) = z + ai, \ G_{C_a}(z) = \frac{z - ai}{z^2 + a^2}$$

を得る. スティルチェス逆変換公式より C_a の確率密度関数は

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \operatorname{Im} G_\mu(x + iy) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

古典確率との比較

命題 1.2

各 $\mu \in I(\boxplus)$ $(\mu \in I(*))$ は自由レヴィ-ヒンチン表現をもつ, *i.e.* 一意に

- $a \geqq 0$,
- $\gamma \in \mathbb{R}$,
- レヴィ測度 ν ($\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$ を満たす $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上の測度)

が存在して,

$$R_\mu(z) = az^2 + \gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 - xz} - 1 - xz1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx).$$

$$\left(\log \left(\int e^{izx} \mu(\mathrm{d}x) \right) = -\frac{1}{2} az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx). \right)$$

Remark 1.3

a は半円分布部分, γ はシフト部分を意味する. 上記の定理の逆も言える. (a, ν, γ) を自由三つ組と呼ぶ.

ベルコビッチ・パタ全単射

$\Lambda : I(*) \xrightarrow{\text{bij}} I(\text{田})$ が**ベルコビッチ・パタ全単射**であるとは, $\mu \in I(*)$ で (a, ν, γ) を持つものに対し $\Lambda(\mu) \in I(\text{田})$ で (a, ν, γ) を持つものを対応させる写像.

Figure 1: 2010 年の講演スライド

https://youtube.com/playlist?list=PLw9pzRWO-H-dnZ5yi7O--o6XbQFMBwkmn

自由擬無限分解可能分布

自由擬無限分解可能分布の定義

(FLKVoi) においてレヴィ測度を有限測度から符号付有限測度に置き換えることを考える．この場合，全ての b, τ に対して (FLKVoi) に対応する測度が存在するとは限らない．

- $\mathcal{M}_s := \{$ 符号付有限ボレル測度 $\}$
- $\mu \in \mathcal{P}$ が自由擬無限分解可能 $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ のヴォイクレスク変換が $\exists 1 b \in \mathbb{R}, \tau \in \mathcal{M}_s$ s.t.

$$\varphi_\mu(z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t} \tau(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

  という形を持つ．
- 符号付測度のハーン・ジョルダン分解を考える:

$$\tau = \tau_+ - \tau_-, \quad \tau_+(\mathbb{R} \setminus C_+) = 0, \tau_-(\mathbb{R} \setminus C_-) = 0$$

自由擬無限分解可能分布の解釈

$\mu \in \mathcal{P}$ が自由擬無限分解可能ならば

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(z) &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau(\mathrm{d}t) \\ &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}(\tau_+(\mathrm{d}t) - \tau_-(\mathrm{d}t)) \\ &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_+(\mathrm{d}t) - \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_-(\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

より

$$\varphi_\mu(z) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_-(\mathrm{d}t) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_+(\mathrm{d}t)$$

よって

$$\mu \boxplus \mu_- = \mu_+$$

を得る．ここで μ_+, μ_- は $(b, \tau_+), (0, \tau_-)$ に対応する自由無限分解可能分布．

例: 二点分布

$\mu = 2^{-1}\delta_0 + 2^{-1}\delta_1$ を考えると,

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{2z-1}{2z(z-1)}$$

となり

$$F_\mu^{\langle -1 \rangle}(z) = \frac{z+1 \pm \sqrt{z^2+1}}{2}, \ \varphi_\mu(z) = \frac{z+1 \pm \sqrt{z^2+1}}{2} - z$$

- $\sqrt{z^2+1}$ は $\mathbb{C}^+$ で解析的でない. $z = \sqrt{-1}$ を考えよ!
- φ_μ は $\mathbb{C}^+$ で解析的でないので自由擬無限分解可能分布にならない.
- より一般に自由擬無限分解可能分布は高々一つの atom しか持たないことが示せる.
- これにより古典ポアソン分布など離散古典無限分解可能分布は自由擬無限分解可能分布にならない.

自由擬無限分解可能分布を生成するため役に立つ重要な結果

定理 2.1 (Bercovici and Voiculescu(1995))

$r > 1$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して次を満たすようにできる: f を $\{z \in \mathbb{C} | |z| < r\}$ 上の解析関数で

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$
$$|f(z)| < \delta$$

を満たすとする．このとき

(1) $\mathcal{R}(z) = z + f(z)$ はある $\mathbb{R}$ 上の確率分布 μ の $\mathcal{R}$ 変換 $\mathcal{R}_\mu$ になっている．

(2) $\mathrm{supp}(\mu) = [a, b]$ という形をしており $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon] \subset \mathrm{supp}(\mu) \subset [-2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$

(3) $G_\mu|_{C_\pm}$ は *conformal* で $\mathbb{R} \backslash \{a, b\}$ に解析接続できる．

(4) μ は絶対連続で解析的な密度を $[a, b]$ でもつ．

(5) $|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{d}t}| < \varepsilon$ *for all* t.

Cramér の定理の破れ

ある確率分布 $\mu_\pm$ で

$$\mathcal{R}_{\mu_\pm}(z) = z \pm \varepsilon z^2$$

とできる．これより

$$\mu_+ \boxplus \mu_- = S(0, 1)$$

となるこれは確率論における Cramér の定理が成り立たないことを示している．

$S(0,1)$ は二つの無限分解可能分布の自由加法畳み込みでは書けない

自由擬無限分解可能分布の例

例 1-1

次の $\mathbb{C}^+$ 上の関数を考える:

$$\varphi(z) = \underbrace{-ai}_{\text{コーシー分布パート}} - \underbrace{\frac{\lambda cz}{z-c}}_{\text{MP 分布パート}}$$
$$= \int \frac{1+zt}{z-t}\frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} - \int \frac{1+zt}{z-t}\frac{\lambda c}{c^2+1}\delta_c(\mathrm{d}t) - \frac{\lambda}{c^2+1}$$

これから逆算すると

$$F(z) = \frac{z + c(\lambda+1) + ai \pm \sqrt{(z+c(\lambda+1)+ai)^2 - 4c(z+ai)}}{2}$$

が φ がもしヴォイクレスク変換ならば, それに対応する F_μ の候補となる. ここで平方根は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ でとる.

この F は確率分布の逆数コーシー変換になっているか??

例 1-2

定理 3.1 (定理 1.1 再掲)

$F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ が解析的で

$$\lim_{y\to\infty} \frac{F(iy)}{iy} = 1 \tag{2}$$

をみたす $\iff$ $\exists 1\mu \in \mathcal{P}$ *s.t.* $F = F_\mu$ *on* $\mathbb{C}^+$.

(2) より平方根の前の $\pm$ は $+$ しか許さない.

$$F(z) = \frac{z + c(\lambda+1) + ai + \sqrt{(z + c(\lambda+1) + ai)^2 - 4c(z+ai)}}{2}$$

において

- 青色の部分は $\mathbb{C}^+$ に入っているし解析的である (安全).
- 赤い部分が問題となる. ここの平方根の中が $[0, \infty)$ に入っていなければ OK.

例 1-3

$z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ として平方根の中を見ると

$$(x + c(\lambda + 1))^2 - 4cx - (y + a)^2 + 2i(y + a)(x + c(\lambda - 1))$$

これが実軸に乗り得るアプナイ値は $x = c(1 - \lambda)$. この時, 平方根の中は

$$4c^2\lambda - (y + a)^2$$

これが全ての $y > 0$ で負の値をとるのは $0 < \lambda \leqq \left(\frac{a}{2c}\right)^2$. このとき, $F(\mathbb{C}^+) \subset \mathbb{C}^+$ となる.

したがってこの範囲では

- φ はある確率分布のヴォイクレスク変換であり,
- その対応する分布は自由無限分解可能分布ではないが
- 自由擬無限分解可能分布.

例 1-4

$\varphi_{\rho_{a,\lambda}}(z) = -ai - \frac{\lambda a z}{z-a}$ とする．この例は具体的な確率密度関数が求められるケースがある．
$\rho_{1,1/4}$ のとき，計算するとその p.d.f. は

$$f(x) = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{|4x-3|}\left(x\sqrt{\sqrt{16x^2-24x+73}-|4x-3|} - \operatorname{sign}(4x-3)\sqrt{\sqrt{16x^2-24x+73}+|4x-3|}\right)}{8\sqrt{2}\pi(x^2+1)}.$$

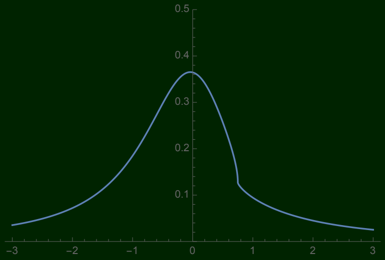


Figure 2: probability density function of $\rho_{1,1/4}$

例 2

$a, \sigma > 0$ に対して

$$\varphi(z) = -ai - \frac{\sigma^2}{z} \tag{3}$$

を考える．これから逆算すると

$$F(z) = \frac{z + ai \pm \sqrt{(z+ai)^2 + 4\sigma^2}}{2}$$

が φ がもしヴォイクレスク変換ならば，それに対応する F_μ の候補となる．この F は確率分布の逆数コーシー変換になっているか??

$4\sigma^2 \leqq a^2$ ならばある確率分布 μ が存在して $F = F_\mu$ となる．

若干の考察

- この例に対応する自由三つ組は $(-\sigma^2, \frac{a\mathrm{d}u}{\pi u^2}, 0)$ である．負の半円パート (i.e. ガウスパート) でも対応する分布があるケースがある．
- 古典確率論の場合, Lindner, Pan and Sato(Trans. Amer. Math. Soc, 2018) で μ が擬無限分解可能分布であるとき, そのガウスパートは必ず非負となることが示されている．
- これより三つ組のもとで (ベルコビッチ・パタ全単射を拡張する意味での) この例に対応する擬無限分解可能分布は存在しない?
- ベルコビッチ・パタ全単射を拡張する意味での擬無限分解可能分布・自由擬無限分解可能分布の対応を見出せるか? 今のところ例はない．