自由擬無限分解可能分布について

堀田一敬（山口大工), Wojciech Mlotkowski(Wroclaw Univ.), 植田優基（一関高専）との共同研究

佐久間紀佳

2021 年 3 月 15 日
10:15 から 10:30

愛知教育大学教育学部 (数学教育講座)

導入

自由確率論における解析的変換

自由擬無限分解可能分布

自由擬無限分解可能分布の例

導入

動機

- ベルコビッチ・パタ全単射の拡張
  Bożejko 氏からの質問
- Lindner, Pan and Sato の自由版

無限分解可能分布

μ が $\mathbb{R}$ 上の無限分解可能分布であるとする.

- レヴィ・ヒンチン表現: 一意な $a \geqq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 上の測度 ν で $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ が存在して

$$\log\left(\int e^{izx}\mu(\mathrm{d}x)\right) = -\frac{1}{2}az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx1_{[-1,1]}(x)\right)\nu(dx).$$

- 逆も成り立つ. (a, γ, ν) を 3 つ組という.
- 一意な $\gamma \in \mathbb{R}$, 有限測度 $\zeta(\mathrm{d}x) = a\delta(\mathrm{d}x) + (1 \wedge x^2)\nu(\mathrm{d}x)$ が存在して

$$\log\left(\int e^{izx}\mu(\mathrm{d}x)\right) = i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx1_{[-1,1]}(x)\right)(1 \wedge x^2)^{-1}\zeta(\mathrm{d}x).$$

- 逆も成り立つ. (γ, ζ) を 2 つ組という.

符号付き測度

$\zeta : \mathcal{B} \to (-\infty, \infty)$ を有限符号付き測度とする.

定理 1 (ハーン・ジョルダン分解)
ζ を有限符号付き測度とする．このとき非交和なボレル集合 $C^{(+)}$, $C^{(-)}$ と有限測度 $\zeta^{(+)}, \zeta^{(-)}$ で $\zeta^{(+)}(\mathbb{R}\backslash C^{(+)}) = \zeta^{(-)}(\mathbb{R}\backslash C^{(-)}) = 0$ を満たすものが存在して

$$\zeta = \zeta^{(+)} - \zeta^{(-)}$$

と書ける.

$\gamma \in \mathbb{R}$, ζ を有限符号付き測度とする.

$$i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx 1_{[-1,1]}(x) \right) (1 \wedge x^2)^{-1} \zeta(\mathrm{d}x)$$

自由確率論における解析的変換

自由確率論クイックレヴュー: 自由畳込み

- $\mathcal{P} := \{\mu \mid \mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 $\}$
- $\boxplus$: 自由 (加法的) 畳込み
  X, Y を自由独立な非可換確率変数とする. $X \sim \mu$, $Y \sim \rho$ とすると, $\mu \boxplus \rho$ は $X + Y$ の分布を生成する演算.
- μ が自由無限分解可能とは次が成立すること: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mu_n \in \mathcal{P}$ s.t.

$$\mu = \mu_n^{\boxplus n}.$$

  $I(\boxplus) := \{\mu \mid \mathbb{R}$ 上の自由無限分解可能分布 $\}$
- これらの取り扱いは
  - 解析的手法 (コーシー変換, ヴォイクレスク変換, R(自由キュムラント) 変換)(Mingo and Speicher の本を参照すると良い)
  - 組合せ論的手法 (Nica and Speicher の本を参照すると良い)

  で取り扱う.

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 1

- $\mu \in \mathcal{P}$ のコーシー変換 $G_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$;

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \mu(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

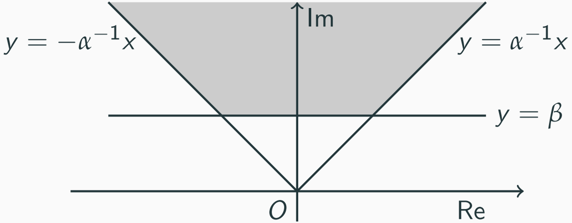
- $\mu \in \mathcal{P}$ の逆数コーシー変換 $F_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$;

$$F_\mu(z) := 1/G_\mu(z).$$

これは Pick 関数である.

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 2

- F_μ は ∞ 周りの制限されたある領域 $\Gamma_{\alpha,\beta} := \{z = x + iy : y > \beta, |x| < \alpha y\}$ で単葉 (univalent). よって, F_μ の逆写像 $F_\mu^{\langle -1 \rangle}$ が定義できる.



ここで, $\alpha > 0, \beta > 0$ は分布により取れる値は変わる.

- $\mu \in \mathcal{P}$ のヴォイクレスク変換 $\varphi_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$:

$$\varphi_\mu(z) = F_\mu^{\langle -1 \rangle}(z) - z, \quad z \in \Gamma_{\alpha,\beta} \tag{1}$$

- 適切な $\alpha > 0, \beta > 0$, $\mu, \rho \in \mathcal{P}$ に対して,

$$\varphi_{\mu \boxplus \rho}(z) = \varphi_\mu(z) + \varphi_\rho(z), \quad z \in \Gamma_{\alpha,\beta}$$

自由確率論クイックレヴュー: 解析的変換 3

- $\mu \in \mathcal{P}$ の R 変換 $R_\mu : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$;

$$R_\mu(z) = zF_\mu^{\langle -1 \rangle}(z^{-1}) - 1 = z\varphi_\mu(z^{-1}), \quad z^{-1} \in \Gamma_{\alpha,\beta}$$

- $\mu \in \mathcal{P}$ が自由無限分解可能 $\iff$ $\exists 1 b \in \mathbb{R}, \rho \in \mathcal{M}_f :=$ {$\mathbb{R}$ 上の有限測度 } s.t.

$$\varphi_\mu(z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\rho(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+. \qquad \text{(自由 Lévy-Khintchine 表現)}$$

$\iff$ $\exists 1 a \geqq 0, \gamma \in \mathbb{R}, \nu$: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上のレヴィ測度 s.t.

$$R_\mu(z) = az^2 + \gamma z + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - zt\mathbb{1}_{[-1,1]}(t) \right) \nu(\mathrm{d}t), z \in \mathbb{C}^-.$$

- 確率論における Lévy-Khintchine 表現:

$$\log\left(\int e^{izx}\mu(\mathrm{d}x) \right) = -\frac{1}{2}az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx).$$

主値

写像

$$z \mapsto \sqrt{z}$$

は $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ に対する主値とする.

すなわち偏角の主値を

$$\mathrm{Arg}(z) \in (0, 2\pi)$$

とする.

例: 半円分布

自由 Lévy-Khintchine 表現において $b=0,\ \tau=\sigma^2\delta_0$ の場合:

$$\varphi_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(\omega)=\frac{\sigma^2}{\omega},\ F^{\langle -1\rangle}_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(\omega)=\frac{\sigma^2}{\omega}+\omega$$

である. $\omega=F_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)$ を考えると,

$$z=\frac{\sigma^2}{F_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)}+F_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)\iff F_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)^2-zF_\mu(z)+\sigma^2=0$$

となり

$$F_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)=\frac{z+\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2},\quad G_{\mathbf{S}(0,\sigma^2)}(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-4\sigma^2}}{2}$$

を得る. スティルチェス逆変換公式より $\mathbf{S}(0,\sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\operatorname{Im}G_\mu(x+iy)=\frac{1}{\pi}\sqrt{4\sigma^2-x^2}\mathbb{1}_{[-2\sigma,2\sigma]}(x)$$

例: コーシー分布

$a > 0$ とする．(自由 Lévy-Khintchine 表現) において $b = 0$, $\tau(\mathrm{d}t) = \frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}$ の場合:

$$\varphi_{\mathbf{C}_a}(\omega) = -ai = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\omega t}{\omega - t} \frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}, \ F_{\mathbf{C}_a}^{\langle -1 \rangle}(\omega) = \omega - ai$$

なので

$$F_{\mathbf{C}_a}(z) = z + ai, \ G_{\mathbf{C}_a}(z) = \frac{z - ai}{z^2 + a^2}$$

を得る．スティルチェス逆変換公式より $\mathbf{C}_a$ の確率密度関数は

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \downarrow 0} \operatorname{Im} G_\mu(x + iy) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

古典確率との比較

命題 2
各 $\mu \in I(⊞)$ ($\mu \in I(*)$) は自由レヴィ-ヒンチン表現をもつ, *i.e.* 一意に

- $a \geqq 0$,
- $\gamma \in \mathbb{R}$,
- レヴィ測度 ν ($\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(1 \wedge |x|^2)\nu(dx) < \infty$ を満たす $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上の測度)

が存在して,

$$R_\mu(z) = az^2 + \gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-xz} - 1 - xz1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx).$$

$$\left(\log \left(\int e^{izx} \mu(\mathrm{d}x) \right) = -\frac{1}{2}az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - izx1_{[-1,1]}(x) \right) \nu(dx). \right)$$

注意 3
a は半円分布部分, γ はシフト部分を意味する. 上記の定理の逆も言える. (a, ν, γ) を自由三つ組と呼ぶ.

ベルコビッチ・パタ全単射

$\Lambda : I(*) \xrightarrow{\text{bij}} I(\text{田})$ が**ベルコビッチ・パタ全単射**であるとは, $\mu \in I(*)$ で (a, ν, γ) を持つものに対し $\Lambda(\mu) \in I(\text{田})$ で (a, ν, γ) を持つものを対応させる写像.

Figure 1: 2010 年の講演スライド

自由擬無限分解可能分布

自由擬無限分解可能分布の定義

(自由 Lévy-Khintchine 表現) においてレヴィ測度を有限測度から符号付有限測度に置き換えることを考える．この場合, 全ての b, τ に対して (自由 Lévy-Khintchine 表現) に対応する測度が存在するとは限らない.

- $\mathcal{M}_s :=$ { 符号付有限ボレル測度 }
- $\mu \in \mathcal{P}$ が自由擬無限分解可能 $\overset{\text{def}}{\iff}$ μ のヴォイクレスク変換が $\exists 1 b \in \mathbb{R}, \tau \in \mathcal{M}_s$ s.t.

$$\varphi_\mu(z) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau(\mathrm{d}t), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

  という形を持つ.
- 符号付測度のハーン・ジョルダン分解を考える:

$$\tau = \tau_+ - \tau_-, \quad \tau_+(\mathbb{R}\backslash C_+) = 0, \tau_-(\mathbb{R}\backslash C_-) = 0$$

自由擬無限分解可能分布の解釈

$\mu \in \mathcal{P}$ が自由擬無限分解可能ならば

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(z) &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau(\mathrm{d}t) \\ &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}(\tau_+(\mathrm{d}t) - \tau_-(\mathrm{d}t)) \\ &= b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_+(\mathrm{d}t) - \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_-(\mathrm{d}t)\end{aligned}$$

より

$$\varphi_\mu(z) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_-(\mathrm{d}t) = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zt}{z-t}\tau_+(\mathrm{d}t)$$

よって

$$\mu \boxplus \mu_- = \mu_+$$

を得る．ここで μ_+, μ_- は $(b, \tau_+), (0, \tau_-)$ に対応する自由無限分解可能分布.

自由擬無限分解可能分布の例

自由擬無限分解可能分布にならない例: 二点分布

$\mu = 2^{-1}\delta_0 + 2^{-1}\delta_1$ を考えると,

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{2z-1}{2z(z-1)}$$

となり

$$F_\mu^{\langle -1\rangle}(z) = \frac{z+1 \pm \sqrt{z^2+1}}{2}, \ \varphi_\mu(z) = \frac{z+1 \pm \sqrt{z^2+1}}{2} - z$$

- $\sqrt{z^2+1}$ は $\mathbb{C}^+$ で解析的でない. $z = \sqrt{-1}$ を考えよ!
- φ_μ は $\mathbb{C}^+$ で解析的でないので自由擬無限分解可能分布にならない.
- より一般に自由擬無限分解可能分布は高々一つの atom しか持たないことが示せる.
- これにより古典ポアソン分布など離散古典無限分解可能分布は自由擬無限分解可能分布にならない.

例

$a, \sigma > 0$ に対して

$$\varphi(z) = \underbrace{-ai}_{\text{コーシー分布パート}} - \underbrace{\frac{\sigma^2}{z}}_{\text{半円分布パート}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{z-t} \left(\frac{a\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} - \sigma^2 \delta_0(\mathrm{d}t) \right) (= F^{\langle -1 \rangle}(z) - z) \tag{2}$$

を考える．この関数はある分布のヴォイクレスク変換になっているか否か?

もし φ がヴォイクレスク変換ならば,

$$F(z) = \frac{z + ai \pm \sqrt{(z+ai)^2 + 4\sigma^2}}{2}$$

がそれに対応する F_μ の候補となる．

この F は確率分布の逆数コーシー変換になっているか?? $+$ 符号のとき対応する分布がある．

$4\sigma^2 \leqq a^2$ ならばある確率分布 μ が存在して $F = F_\mu$ となる．この分布を $\mu := \gamma_{a,\sigma^2}$ とする

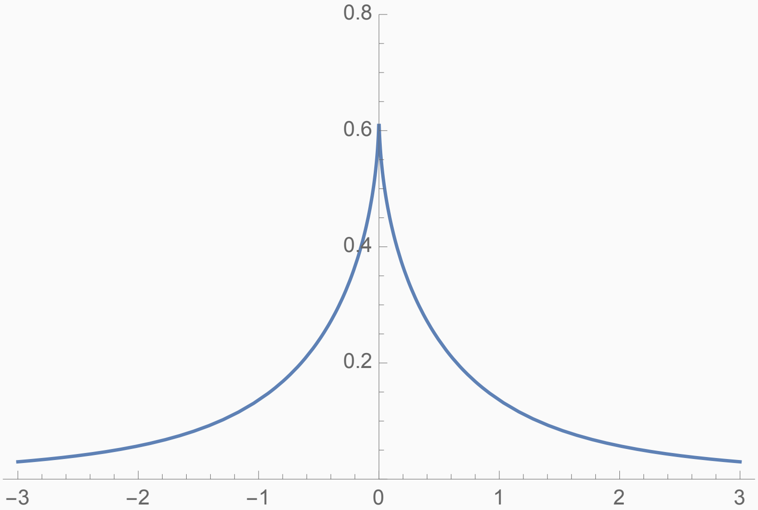


Figure 2: $\gamma_{1,1/4}$ の確率密度関数

若干の考察

- この例に対応する自由三つ組は $(-\sigma^2, \frac{\mathrm{a}du}{\pi u^2}, 0)$ である．負の半円パート (i.e. ガウスパート) でも対応する分布があるケースがある．
- 古典確率論の場合, Lindner, Pan and Sato(Trans. Amer. Math. Soc, 2018) で μ が擬無限分解可能分布であるとき，そのガウスパートは必ず非負となることが示されている．
- これより三つ組のもとで (ベルコビッチ・パタ全単射を拡張する意味での) この例に対応する擬無限分解可能分布は存在しない．
- ベルコビッチ・パタ全単射を拡張する意味での擬無限分解可能分布・自由擬無限分解可能分布の対応を見出せるか? 今のところ例はない．