間欠力学系の滞在測度に関する極限定理

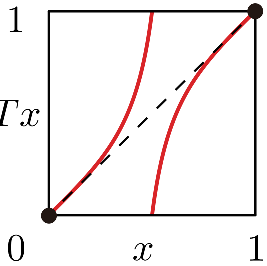
世良　透

京都大学大学院理学研究科

確率論ヤングサマーセミナー
休暇村伊良湖，2018 年 8 月 20 – 24 日

- 以下，$T:[0,1]\to[0,1]$ は区間写像.

  中立不動点 $\cdots$ 微分係数が 1 である不動点



間欠力学系：(弱反発) 中立不動点を持つ T の反復作用による時間発展 $(x, Tx, T^2x, \dots)$

- 統計物理などで現れる間欠現象のモデル
- 無限測度を保存するエルゴード変換の典型例

本講演：間欠力学系の滞在時間・測度に関する極限定理を紹介.

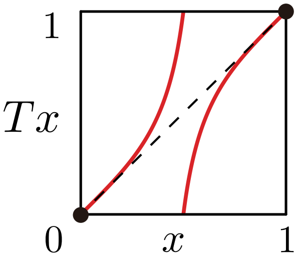
本題の前に，間欠現象とは...

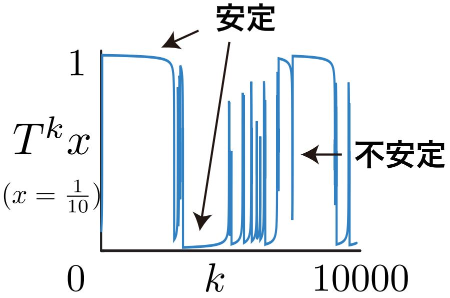
間欠現象：非平衡系が，持続的・周期的な「安定状態」と一時的・非周期的に生ずる「不安定状態」とを繰り返す現象.

- 熱対流や化学反応系での「層流から乱流への間欠的遷移」が代表例

Pomeau–Manneville ('80)：間欠力学系モデルによる研究

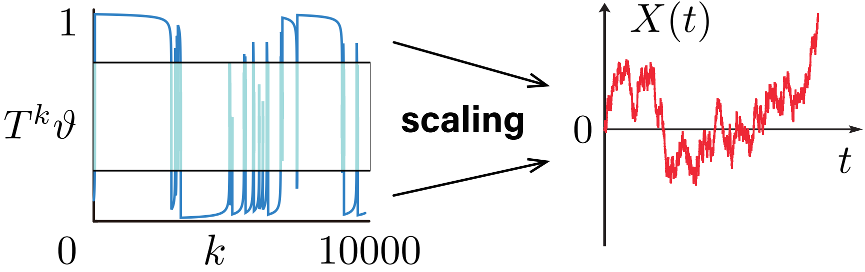
安定状態 ＝ 中立不動点近傍への滞在





本講演の主題：関数型極限定理

$[0,1]$ 上の絶対連続な初期分布を置き，力学系を確率過程と見なす.



「二つの中立不動点 $0,1$ 近傍への滞在時間」の関数型極限として
「一次元拡散過程の $(-\infty,0)$, $(0,\infty)$ への滞在時間」が現れる.

間欠力学系の滞在に関するスケール極限

Markov 過程の極限定理の類推から得られた先行研究を一部抜粋：

不安定状態 (中立不動点遠方) の滞在

- Aaronson ('81)

  Daling–Kac ('56) 型極限定理

- Owada–Samorodnitsky ('15)

  Bingham ('71) 型極限定理

  Aaronson ('81) を関数型に拡張

安定状態 (中立不動点近傍) の滞在

- Thaler ('02)

  Lamperti ('58) 型逆正弦法則

  中立不動点が二点

- S–K. Yano ('17+)

  Barlow–Pitman–Yor ('89) 型

  中立不動点が三点以上

講演者はこれらの関数型・結合分布的拡張を得た (Fujihara–Kawamura–Y. Yano ('07) 型). 今回は「安定状態に関する関数型拡張」に限り解説.

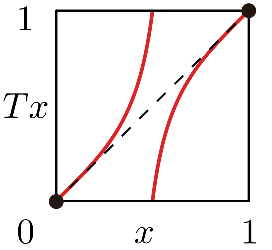
1. イントロダクション
2. 先行研究：Lamperti 型一般化逆正弦法則
3. 主結果：Fujihara–Kawamura–Y. Yano 型関数型極限定理
4. 証明の概略

1. イントロダクション
2. 先行研究：Lamperti 型一般化逆正弦法則
3. 主結果：Fujihara–Kawamura–Y. Yano 型関数型極限定理
4. 証明の概略

設定 (Thaler ('81), ('83))

以下では，区間写像 $T : [0,1] \to [0,1]$ が次を満たすと仮定：

- T のグラフは点対称的
- $T|_{[0,\frac{1}{2}]} : [0,\frac{1}{2}] \to [0,1]$ は C^2 全単射
- 点 0 (および点 1) は中立不動点
- $T''x > 0, \quad x \in [0,\frac{1}{2}]$



(「点対称性」と「中立不動点が二点のみ」であるのは簡単のため)

例：$r \geq 1$ として，

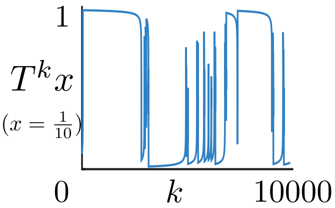
$$Tx = \begin{cases} x + 2^r x^{1+r}, & x \in [0,\frac{1}{2}], \\ x - 2^r(1-x)^{1+r}, & x \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

間欠写像 T の基本的性質

T は Lebesgue 測度と同値なエルゴード不変測度 μ を持つ.

- μ は定数倍を除き一意，中立不動点 0 と 1 の近傍で発散 (無限測度).

$(T^k x)_{k\geq 0}$ は再帰的，$0, 1$ 近傍に集中して滞在：$A \in \mathcal{B}_+([0,1])$ として



$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(T^k x) \underset{n\to\infty}{\to} \infty, \quad \text{a.e.}x,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(\varepsilon,1-\varepsilon)}(T^k x) \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \text{a.e.}x.$$

では 0 と 1 近傍の滞在比率はどうなるか？

$\rightsquigarrow$ 分布収束の意味では極限が存在 (a.e. 収束では上手くいかない)

Thaler ('02) の Lamperti 型一般化逆正弦法則

Theorem (Thaler ('02))

次を仮定：「ある $c > 0$, $r > 1$ に対し,

$$Tx - x \sim cx^{1+r}, \quad \textit{as } x \to 0.」$$

(したがって $-(Tx - x) \sim c(1-x)^{1+r}$*, as* $x \to 1$*.)*

このとき，任意の $[0,1]$-値・絶対連続な確率変数 ϑ に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k\vartheta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \frac{\xi_-}{\xi_- + \xi_+}\delta_0 + \frac{\xi_+}{\xi_- + \xi_+}\delta_1, \quad \textit{in } \mathcal{P}[0,1].$$

ξ_- と ξ_+ は *i.i.d.*$(1/r)$-片側安定確率変数．$\mathcal{P}[0,1]$ は $[0,1]$ 上の確率測度全体．*(* $r = 2$ のとき $\xi_-/(\xi_- + \xi_+)$ は逆正弦分布に従う．*)*

補足 1

- 詳しくは，$Tx - x$ の $x \to 0$ での $(1 + r)$ 次正則変動性 $(r > 1)$ と前頁の滞在測度の分布収束は同値.
- 滞在測度の分布収束極限は前頁で挙げたものにほぼ限られる.
- 点対称性を課さない場合は，$|Tx - x|$ が $x \to 0$ および $x \to 1$ での同程度の正則変動性が鍵．極限に非対称性が生じる.

- 中立不動点が三点以上でも $|Tx - x|$ の中立不動点近傍での正則変動性が鍵．極限は逆正弦分布の多次元拡張 (S–Yano('17+)).

主結果：関数型拡張

$S(t,x) := \sum_{k=0}^{[t]-1} \delta_{T^k x} + (t-[t])\delta_{T^{[t]}x}$ と置く (滞在測度の線形補間).

Theorem (S, in preparation)

Thaler ('02) と同じく，次を仮定：「ある $c>0$, $r>1$ に対し，

$$Tx - x \sim cx^{1+r}, \quad \text{as } x \to 0. 」$$

このとき，任意の $[0,1]$-値・絶対連続な確率変数 ϑ に対して

$$\left(\frac{1}{n} S(nt, \vartheta) \; ; \; t \geq 0 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(Z_-(t)\delta_0 + Z_+(t)\delta_1 \; ; \; t \geq 0 \right),$$

$$\text{in } C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}[0,1]).$$

Z_-, Z_+ は対称 $(2-2/r)$ 次元 *Bessel* 拡散過程の負側，正側滞在時間. $\mathcal{M}[0,1]$ は $[0,1]$ 上の有限測度全体.

補足 2

$r > 1$ とする．対称 $(2-2/r)$ 次元 Bessel 拡散過程 $X(t)$ とは,

$$\begin{cases} |X(t)| \text{ は原点を反射壁とする } (2-2/r) \text{ 次元 Bessel 拡散過程.} \\ X(t) \text{ が原点にいるとき ``次に負・正に進む確率'' は } 1/2 \text{ ずつ.} \end{cases}$$

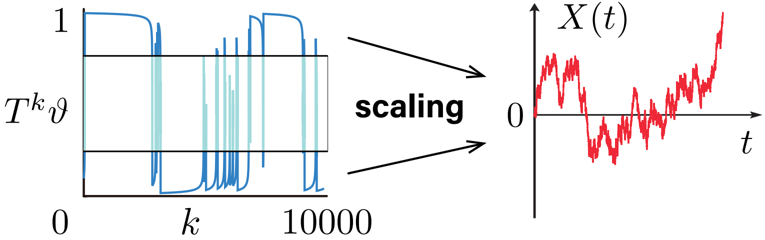
特に $r = 2$ の場合は 1 次元 Brown 運動.

- $X(t)$ や負側・正側滞在時間 $Z_{\pm}(t)$ は scaling property を持つ.
- $Z_{\pm}(1)$ は一般化逆正弦分布に従う (Barlow–Pitman–Yor ('89)).

$$S(n,t) := \sum_{k=0}^{[t]-1} \delta_{T^k x} + (t-[t])\delta_{T^{[t]}x}.$$

$$\left(\frac{1}{n}S(nt,\vartheta)\ ;\ t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(Z_-(t)\delta_0 + Z_+(t)\delta_1\ ;\ t \geq 0\right),$$

in $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}[0,1])$.



Z_-, Z_+：X の負側，正側滞在時間

1. イントロダクション
2. 先行研究：Lamperti 型一般化逆正弦法則
3. 主結果：Fujihara–Kawamura–Y. Yano 型関数型極限定理
4. 証明の概略

証明の道筋

1. 周遊長の相関の指数的減衰，
   tail probability のべき減衰

↓

2. 周遊長の関数型極限定理 ＋ 3. Williams formula

↓

4. 滞在時間・測度の関数型極限定理

Thaler ('02) ら先行研究の証明は解析的．今回の証明はより確率論的．Fujihara–Kawamura–Y. Yano ('07) と同様に周遊長を利用．
FKY(Markov 過程の場合) と比べて，1 と 2 の部分に困難がある．

間欠力学系の周遊長

$\varepsilon > 0$ を十分小にとる．以下，ランダム初期点 ϑ の分布が

$$\frac{\mu(\cdot \cap (\varepsilon, 1-\varepsilon))}{\mu((\varepsilon, 1-\varepsilon))}$$

(不変測度 μ の制限) な場合のみ考える．
$(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ を基点とする $(T^k\vartheta)_{k\geq 0}$ の周遊路たちは定常過程をなす．

$$\ell_0(n) := n \text{ 回目の周遊路の } (0, \varepsilon) \text{ への滞在時間}$$

$$\ell_1(n) := n \text{ 回目の周遊路の } (1-\varepsilon, 1) \text{ への滞在時間}$$

これらを周遊長と呼ぶ．$\{\ell_0(n), \ell_1(n)\ ;\ n \geq 1\}$ も定常過程．
$\varepsilon > 0$ が十分小のとき，$\min_{i=0,1} \ell_i(n) = 0$，$n \geq 1$．

1. 周遊長の相関，tail probability

$\mathcal{F}_n^m := \sigma\{\ell_0(k), \ell_1(k) \,;\, n \le k \le m\}$ と置く.
first return map の解析，区間力学系の諸定理 (Adler ('75), Bowen–Series ('79), Aaronson ('97) など) から次を得る：

$C > 0$, $\delta \in (0,1)$ が存在し，任意の $A \in \mathcal{F}_0^n$, $B \in \mathcal{F}_{n+k}^\infty$ に対して

$$\left| \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} - 1 \right| \le C\delta^k.$$

また Thaler ('02) により，$Tx - x \sim cx^{1+r}$ $(x \to 0)$ と対称性から

$$\mathbb{P}(\ell_i(1) > n) \sim c' n^{-r}, \quad \text{as } n \to \infty,\ i = 0, 1.$$

2. 周遊長の関数型極限定理

$\eta_i^T(t) := \sum_{k=1}^{[t]} \ell_i(k)$, η_-, η_+ : 適当な i.i.d.$(1/r)$-stable subordinators.
前頁の結果と Tyran-Kamińska ('10) の定理の修正から次を得る：

$$\left(\frac{\eta_0^T(N^r t)}{N}, \frac{\eta_1^T(N^r t)}{N} \; ; \; t \geq 0 \right) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathrm{d}} \Big(\eta_-(t), \eta_+(t) \; ; \; t \geq 0 \Big),$$

in $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$.

注：Tyran-Kamińska ('10) $\cdots$ 定常的部分和の関数型極限定理
相関の指数的減衰の下で，安定過程への収束定理を論じる (i.i.d. の場合は古典的)．jump measure の Poisson random measure への収束を利用．

3. Williams formula

$$S_0(t) := \sum_{k=0}^{[t]-1} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(T^k\vartheta) + (t-[t])\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(T^{[t]}\vartheta)$$

周遊長の和 η_0^T, η_1^T を用いて $(T^k\vartheta)$ の $(0,\varepsilon)$ への滞在時間 S_0 を表現：

$$\boxed{S_0^{-1}(t) = t + \eta_1^T\Big((\eta_0^T)^{-1}(t)\Big) + (\eta_0^T)^{-1}(t), \quad t \geq 0.}$$

また対称 $(2-2/r)$ 次元 Bessel 拡散過程 X の負側滞在時間 Z_- は，適当な i.i.d.$(1/r)$-stable subordinators η_-, η_+ を用いて

$$\boxed{Z_-^{-1}(t) = t + \eta_+\big(\eta_-^{-1}(t)\big), \quad t \geq 0.}$$

と表現できる (Watanabe ('95), Y. Yano ('17)，周遊理論により).

4. 滞在時間・測度の関数型極限定理

「2. 周遊長の関数型極限定理」と「3. Williams formula」より

$$\left(\frac{1}{n}S_0(nt)\ ;\ t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \big(Z_-(t)\ ;\ t \geq 0\big), \quad C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),$$

を得る．これから容易に滞在測度の関数型収束

$$\left(\frac{1}{n}S(nt, \vartheta)\ ;\ t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \left(Z_-(t)\delta_0 + Z_+(t)\delta_1\ ;\ t \geq 0\right),$$

$$\text{in } C(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}[0,1]),$$

が得られる．

再訪：証明の道筋

1. 周遊長の相関の指数的減衰,
tail probability のべき減衰

$\Downarrow$

2. 周遊長の関数型極限定理 ＋ 3. Williams formula

$\Downarrow$

4. 滞在時間・測度の関数型極限定理

FKY(Markov 過程) の場合，周遊長は i.i.d. 今回は i.i.d. ではないが，相関の指数的減衰 (1) を示すことで安定過程への収束 (2) が従う．

まとめ

- 間欠力学系の中立不動点近傍への滞在は，間欠現象の安定状態に対応.
- 絶対連続な初期分布を置いたとき，中立不動点近傍への滞在時間の関数型極限として，Bessel 拡散過程の滞在時間が現れる.
- 証明は Fujihara–Kawamura–Y. Yano ('07) (Markov 過程の場合) と同様，周遊長の収束と Williams formula を用いる.
- 周遊長は i.i.d. ではないが "漸近的に i.i.d." Tyran-Kamińska ('10) を利用して Bessel 拡散過程の周遊長への収束を示す.