Sobolev 係数の Forward-Backward SDE と偏微分方程式

山崎 恭

大阪大学基礎工学研究科 M2

2018 年確率論ヤングサマーセミナー
2018/8/20∼24

はじめに

確率論と偏微分方程式

- 線形 PDE
  - SDE との関係 (Feyman-Kac の公式など)
  - 線形 PDE の解を SDE の解の汎関数の期待値で表す.
- 半線形 PDE
  - FBSDE との関係
  - 半線形 PDE の解を FBSDE の解を用いて表す.

BSDE とは

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$: (完備) 確率空間, $W = (W_t)_{t \geq 0}$: d 次元 BM.
- $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$: augmented filtration generated by W .
- $T \in (0, \infty)$ (const.): terminal time.
- $S^2 := \{X$: conti.$(\mathscr{F}_t)$-adapted process $\mid E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2] < \infty\}$.
- $M^2 := \{X$: $(\mathscr{F}_t)$-progressively mble proc. $\mid E[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty\}$.

BSDE (Backward Stochastic Differential Equation)

$$\begin{cases} -dY_s = f(s, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad s \in [0, T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

BSDE とは

- $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^d$ (generator or driver),
- ξ: $\mathbb{R}^d$-valued $\mathscr{F}_T$-measurable r.v. (terminal condition),
- Y: $\mathbb{R}^d$-valued, Z: $\mathbb{R}^{d\times d}$-valued process.
- BSDE の solution とは

$$Y_s = \xi + \int_s^T f(r, Y_r, Z_r)\,dr - \int_s^T Z_r\,dW_r, \quad s \in [0,T]$$

を満たす adapted process の pair (Y,Z).

定理 1 (Pardoux&Peng, 1990)

f : uniformly Lipschitz, $E[\int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds] < \infty$, $\xi \in L^2(\Omega)$ とする.
このとき，unique solution $(Y,Z) \in S^2 \times M^2$ が存在する.

BSDE とは

簡単な場合: $f \equiv 0$ の場合を考える. (i.e. $-dY_s = -Z_s dW_s,\ Y_T = \xi$.)

- $Y_s :=$ right continous modification of $E[\xi|\mathscr{F}_s]$.
- martingale の表現定理より $Z \in M^2$ が存在して
$$Y_s = Y_0 + \int_0^s Z_r\, dW_r.$$
- $Y_T = E[\xi|\mathscr{F}_T] = \xi$ に注意して辺々引くと
$$Y_s = \xi - \int_s^T Z_r\, dW_r.$$
i.e. (Y, Z) は BSDE の solution.
- uniqueness は martingale 表現定理の uniqueness から従う.

FBSDE とは

FBSDE (Forward-Backward SDE)

$$\begin{cases} dX_s = g(s, X_s, Y_s, Z_s)ds + \sigma(s, X_s, Y_s)dW_s, \\ X_0 = \xi; \\ -dY_s = f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad s \in [0, T] \\ Y_T = h(X_T) \end{cases}$$

- FBSDE の solution とは adapted process の組 (X, Y, Z).
- ここでは coefficients が non-random の場合を考える:
- $g, f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}^d$,
- $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$,
- $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,
- ξ : $\mathbb{R}^d$-valued $\mathscr{F}_0$-measurable r.v.

FBSDE とは

定理 2 (Delarue, 2001)

f, g, σ, h: uniformly Lipschitz + linear grouth + $\cdots$, $\xi \in L^2(\Omega)$ とする.
$\sigma\sigma^T$ が一様に正定値, i.e. $\exists\lambda > 0$ s.t. $\xi^T\sigma\sigma^T\xi \geq \lambda|\xi|^2$ ならば,
unique solution $(X, Y, Z) \in S^2 \times S^2 \times M^2$ が存在する.

forward SDE の coefficient g, σ が Y, Z に依らない case. (decoupled)

$$\begin{cases} dX_s = g(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s, \\ X_0 = \xi; \\ -dY_s = f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - Z_s dW_s, \quad s \in [0, T] \\ Y_T = h(X_T) \end{cases}$$

- 以下, coefficient は uniformly Lipschitz + linear grouth を仮定.
- $\rightarrow$ forward SDE は解を持ち, X を given として BSDE が解ける.

FBSDE; PDE との connection

各 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ に対し，FBSDE

$$\begin{cases} dX_s = g(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s, & s \in [t,T], \\ X_t = x; \\ -dY_s = f(s,X_s,Y_s,Z_s)ds - Z_s dW_s, & s \in [t,T], \\ Y_T = h(X_T) \end{cases}$$

を考え，その solution を $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$ と書く．
また PDE

$$\partial_t u + \mathscr{L}u + f(t,x,u,\nabla u\sigma) = 0, \quad u(T,x) = h(x)$$

を考える．ここで $(a_{ij}) := \sigma\sigma^T$ に対し

$$\mathscr{L}u(t,x) := \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(t,x)\partial_i\partial_j u(t,x) + (g\cdot\nabla)u(t,x).$$

定理 3 (nonlinear Feyman-Kac formula, Pardoux&Peng, 1992)

$u \in C_b^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ を PDE の classical solution とする.
このとき $(Y^{t,x}, Z^{t,x}) = (u(s, X_s^{t,x}), (\nabla u \sigma)(s, X_s^{t,x}))_{s \in [t,T]}$ in $S^2 \times M^2$.
とくに $u(t,x) = Y_t^{t,x}$.

証明. $\tilde{Y}_s^{t,x} := u(s, X_s^{t,x})$ に Itô's formula を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\tilde{Y}_s^{t,x} - h(X_T^{t,x}) \\
&= \int_s^T \underbrace{-[\partial_t u + \mathscr{L} u](r, X_r^{t,x})}_{= f\left(r, X_r^{t,x}, u(r, X_r^{t,x}), (\nabla u \sigma)(r, X_r^{t,x})\right)} dr - \int_s^T (\nabla u \sigma)(r, X_r^{t,x})\, dW_r \\
&= \int_s^T f(X_r^{t,x}, \tilde{Y}_r^{t,x}, \tilde{Z}_r^{t,x})\, dr - \int_s^T \tilde{Z}_r^{t,x}\, dW_r,
\end{aligned}
$$

ここで $\tilde{Z}_s^{t,x} := (\nabla u \sigma)(s, X_s^{t,x})$. よって, BSDE の uniqueness から従う.

FBSDE; PDE との connection

定理 4 (cf. El karoui et al., Delarue)

f, g, σ, h は全て C_b^3 とする.
このとき $u(t,x) := Y_t^{t,x}$ は deterministic で, u は PDE の classical solution.
また $(Y^{t,x}, Z^{t,x}) = (u(s, X_s^{t,x}), (\nabla u \sigma)(s, X_s^{t,x}))_{s \in [t,T]}$ in $S^2 \times M^2$.

注意.

- coefficient が滑らかではない場合
  ▷ u は viscosity solution に対応する. (cf. Pardoux&Tang etc.)
  ▷ Sobolev weak solution との関係も調べられている. (cf. Zhang etc.)
- 今回は coefficient に Sobolev regularity を仮定した場合を考える.

主な参考文献: F. Delbaen, J. Qiu and S. Tang (2015)

設定と問題

$b, \phi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $c, \alpha : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}, \sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ とする．次の FBSDE と PDE を考える：

$$
\textbf{(F)} \begin{cases} dX_s^{t,x} = [b(s, X_s^{t,x}) + \alpha(s, X_s^{t,x}) Y_s^{t,x}]ds + \sigma(s) dW_s, \\ X_t^{t,x} = x; \\ -dY_s^{t,x} = [\phi(s, X_s^{t,x}) + c(s, X_s^{t,x}) Y_s^{t,x}]ds - Z_s^{t,x} \sigma(s) dW_s, \\ Y_T^{t,x} = \psi(X_T^{t,x}), \qquad s \in [t,T], \end{cases}
$$

$$
\textbf{(P)} \begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} L u + ((b + \alpha u) \cdot \nabla) u + cu + \phi = 0, \ t \in [0,T], \\ u(T) = \psi. \end{cases}
$$

ここで

$$
Lu(t,x) := \sum_{i,j} a_{ij}(t) \partial_i \partial_j u(t,x), \ A = (a_{ij}) := \sigma\sigma^T.
$$

準備 (Sobolev 空間)

- $H^{m,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^d) |\ \forall|\alpha| \le m,\ \exists D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^d)\}$: Sobolev sp.
- $p = 2$ のとき $H^m(\mathbb{R}^d)$ と書き,

$$\langle f, g\rangle_{H^m} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi,$$

  で Hilbert 空間．($\widehat{f}$ は $f \in L^2$ の Fourier 変換.)
- (Sobolev の埋蔵定理) $m > d/2 + k$ とする．このときある $\delta \in (0,1)$ に対し $H^m(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{k,\delta}(\mathbb{R}^d)$．ここで $C^{k,\delta}(\mathbb{R}^d)$ は Hölder 空間．
- $H^m(\mathbb{R}^d), m > d/2$ は Banach 環．すなわち $u, v \in H^m(\mathbb{R}^d)$ ならば $uv \in H^m(\mathbb{R}^d)$ であり，ある $C = C(m, d)$ が存在して

$$\|uv\|_{H^m} \le C\|u\|_{H^m}\|v\|_{H^m}, \quad \forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^d).$$

仮定

$$(\mathbf{F})\begin{cases} dX_s^{t,x} = [b(s,X_s^{t,x}) + \alpha(s,X_s^{t,x})Y_s^{t,x}]ds + \sigma(s)dW_s, \; X_t^{t,x} = x; \\ -dY_s^{t,x} = [\phi(s,X_s^{t,x}) + c(s,X_s^{t,x})Y_s^{t,x}]ds - Z_s^{t,x}\sigma(s)dW_s, \\ Y_T^{t,x} = \psi(X_T^{t,x}), \qquad s \in [t,T]. \end{cases}$$

ある $m > d/2$ $(m \geq 2)$ に対し，次を仮定する.

- $b \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T];H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
- $\phi, c \in L^2(0,T;H^m(\mathbb{R}^d))$,
- $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d) \cap H^m(\mathbb{R}^d)$,
- $\alpha \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T];H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ or $C([0,T];C_b^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
- $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$: 有界連続かつ，$A = \sigma\sigma^T$ が一様に正定値.

注意 1

Sobolev の埋蔵定理より $\exists\delta \in (0,1)$ s.t. $H^m(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{0,\delta}(\mathbb{R}^d)$ $(\subset C_b(\mathbb{R}^d))$.

$\alpha = 0, c = 0$ の場合

まず $\alpha = 0, c = 0$ の場合を考える．i.e.

$$
\textbf{(F')} \begin{cases} dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s)dW_s, \\ X_t^{t,x} = x; \\ -dY_s^{t,x} = \phi(s, X_s^{t,x})ds - Z_s^{t,x}\sigma(s)dW_s, \\ Y_T^{t,x} = \psi(X_T^{t,x}), \qquad s \in [t, T]. \end{cases}
$$

- $\exists \delta \in (0,1)$ s.t. $H^{m+1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{1,\delta}(\mathbb{R}^d)$ より

$$
|b(t,x) - b(t,y)| \leq K(t)|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \text{ a.e. } t
$$

  for some $K \in L^2([0,T])$.
- よって foward SDE は unique (strong) solution を持つ．

norm equivallent result

$$dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s)dW_s, s \in [t,T],\ X_t^{t,x} = x;$$

補題 1 (norm equivallent result)

$t \in [0,T]$ に依らない定数 $c, C > 0$ が存在して,

1. 任意の Borel 可測関数 $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対し

$$c\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} E[|\varphi(X_s^{t,x})|]\,dx \leq C\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},\ \forall s \in [t,T].$$

2. 任意の Borel 可測関数 $\eta : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対し

$$c\|\eta\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} E\left[\int_t^T |\eta(s, X_s^{t,x})|ds\right]dx \leq C\|\eta\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^d)}.$$

証明. $X_s^{t,x}$ の density に対する Gauss 型の評価から従う.

係数が "regular" な場合

まず係数が十分 "regular" な場合を考える:

命題 1

$b, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+d}), \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，各 (t,x) に対し FBSDE(**F'**) は unique solution $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}) \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を持ち，

1. $u(t,x) := Y_t^{t,x}$ は deterministic,
2. $u \in C^{1,\infty}([0,T] \times \mathbb{R}^d) \cap C([0,T]; H^{k,p}(\mathbb{R}^d)),\ \forall k \geq 0, p \geq 1$,
3. u は次の PDE の unique bouded classical solution:

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} L u + (b \cdot \nabla) u + \phi = 0,\ t \in [0,T], \\ u(T) = \phi. \end{cases}$$

証明．u が classical solution となることはよく知られている．滑らかさも同様の方法で得られる．可積分性は norm equivallent result より従う．

命題 1 で定まる u は次の energy 不等式を満たす:

命題 2

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\|_{H^m}^2 + \nu \int_t^T \|\nabla u(s)\|_{H^m}^2 \, ds \\
&\le \|\psi(t)\|_{H^m}^2 + \int_t^T \langle \phi(s) + \nabla u(s) b(s), u(s) \rangle_{H^m} \, ds.
\end{aligned}
$$

for all $t \in [0,T]$. ここで $\nu := \|\sigma^{-1}\|_\infty^{-2}$.

証明. $\tilde{Y}_s^{t,x} := u(s, x + \int_t^s \sigma(r) dW_r)$ が満たす BSDE に stochastic Fubini theorem を用いる.

注意 2

2 つの解の差に対しても，同様の energy 不等式が成り立つ.

$\alpha = 0, c = 0$ の場合

定理 5

各 $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ に対し FBSDE(**F'**) は unique solution $(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s\in[t,T]} \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を持ち,

1. $u(t,x) := Y_t^{t,x}$ は deterministic,
2. $u \in C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
3. $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}), s \in [t,T],\ Z_s^{t,x} = \nabla u(s, X_s^{t,x})$ a.e. $s \in [t,T]$, a.s.
4. u は次の energy 不等式を満たす:

$$\|u(t)\|_{H^m}^2 + \nu \int_t^T \|\nabla u(s)\|_{H^m}^2 \, ds$$

$$\leq \|\psi(t)\|_{H^m}^2 + \int_t^T \langle \phi(s) + \nabla u(s) b(s), u(s) \rangle_{H^m} \, ds.$$

証明の概略

0. FBSDE が unique solution $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x}) \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を持つことは通常の (F)BSDE theory.

1. $u \in C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; H^{m+1}(\mathbb{R}^d)) =: \mathscr{H}$ の構成.
   - 係数 b, ϕ, ψ を "regular" な b_n, ϕ_n, ψ_n で近似.
   - $u_n \in \mathscr{H}$ をそれに対応する PDE の bdd classical solution.
     $\to$ energy 不等式より，(u_n) は Cauchy 列 in $\mathscr{H}$. 極限を u とおく.

2. $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$, $Z_s^{t,x} = \nabla u(s, X_s^{t,x})$ であること.
   - $Y_s^{n,t,x} := u_n(s, X_s^{t,x})$, $Z_s^{n,t,x} := \nabla u_n(s, X_s^{t,x})$ とおく.
   - Sobolev の埋蔵定理と Itô's formula より $n \to \infty$ のとき

$$(Y^{n,t,x}, Z^{n,t,x}) \to (u(s, X_s^{t,x}), \nabla u(s, X_s^{t,x}))_{s\in[t,T]},$$
$$(Y^{n,t,x}, Z^{n,t,x}) \to (Y^{t,x}, Z^{t,x}) \qquad \text{in } S^2 \times M^2.$$

問題設定と仮定 (確認)

$$
(\mathbf{F}) \begin{cases} dX_s^{t,x} = [b(s, X_s^{t,x}) + \alpha(s, X_s^{t,x})Y_s^{t,x}]ds + \sigma(s)dW_s, \\ X_t^{t,x} = x; \\ -dY_s^{t,x} = [\phi(s, X_s^{t,x}) + c(s, X_s^{t,x})Y_s^{t,x}]ds - Z_s^{t,x}\sigma(s)dW_s, \\ Y_T^{t,x} = \psi(X_T^{t,x}), \qquad s \in [t,T]. \end{cases}
$$

$$
(\mathbf{P}) \begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}Lu + ((b+\alpha u)\cdot\nabla)u + cu + \phi = 0, \ t \in [0,T], \\ u(T) = \psi. \end{cases}
$$

- $Lu(t,x) = \sum_{i,j} a_{ij}(t)\partial_i\partial_j u(t,x), \ A = (a_{ij}) = \sigma\sigma^T$,
- $b \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
- $\phi, c \in L^2(0,T; H^m(\mathbb{R}^d))$, $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d) \cap H^m(\mathbb{R}^d)$,
- $\alpha \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,T]; H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ or $C([0,T]; C_b^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
- $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times d}$: 有界連続かつ A が一様に正定値.

PDE の strong solution

定義 1

$u \in C([0,T]; H^2(\mathbb{R}^d))$ とする．$\partial_t u$ が weak sence で存在し

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}Lu + ((b+\alpha u)\cdot\nabla)u + cu + \phi = 0, \\ u(T) = \psi. \end{cases}$$

が (a.e.) で成立するとき，ここでは u を PDE (**P**) の “strong” solution と呼ぶ．ただし $\partial_t u$ は u を $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ 上の関数とみたときの t に関する弱微分と解釈する．

主問題の解

定理 6

ある $T_0 < T$ が存在して，各 $(t, x) \in (T_0, T] \times \mathbb{R}^d$ に対し FBSDE (**F**) は unique solution $(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s \in [t,T]} \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を持ち，

1. $u(t, x) := Y_t^{t,x}$ は deterministic,
2. $u \in C((T_0, T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2_{loc}(T_0, T; H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$,
3. $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x}), s \in [t, T], \ Z_s^{t,x} = \nabla u(s, X_s^{t,x})$ a.e.$s \in [t, T]$ a.s.
4. u は PDE (**P**) の local strong solution.

注意 3

$(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s \in [t,T]} \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を FBSDE (**F**) の解とする．
$\exists u \in C((T_0, T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2_{loc}(T_0, T; H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ に対し③ が成り立つ
$\Longrightarrow u$ は PDE (**P**) の local strong solution.

証明の概略 (exsistence)

existence. $\tau \in (0,T)$ とする.

- 各 $\zeta \in C([\tau,T];H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\tau,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ に対し，FBSDE

$$
\begin{cases}
dX_s^{t,x} = [b(s,X_s^{t,x}) + \alpha(s,X_s^{t,x})\zeta(s,X_s^{t,x})]ds + \sigma(s)dW_s, \\
X_t^{t,x} = x; \\
-dY_s^{t,x} = [\phi(s,X_s^{t,x}) + c(s,X_s^{t,x})\zeta(s,X_s^{t,x})]ds - Z_s^{t,x}\sigma(s)dW_s, \\
Y_T^{t,x} = \psi(X_T^{t,x}), \qquad s \in [t,T],
\end{cases}
$$

  を考え，$(X_s^{\zeta,t,x}, Y_s^{\zeta,t,x}, Z_s^{\zeta,t,x})_{s\in[t,T]}$ を unique solution とする.
- $u^\zeta(t,x) := Y_t^{\zeta,t,x}$ とおくと，$\zeta \mapsto u^\zeta$ は "適当な空間" で，$T-\tau$ が十分小のとき縮小写像.
- よって $\exists \zeta \in C([\tau,T];H^m(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\tau,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ s.t. $u^\zeta = \zeta$.
- このとき，$Y_s^{\zeta,t,x} = u^\zeta(s,X_s^{\zeta,t,x}) = \zeta(s,X_s^{\zeta,t,x})$,
  $Z_s^{\zeta,t,x} = \nabla u^\zeta(s,X_s^{\zeta,t,x}) = \nabla\zeta(s,X_s^{\zeta,t,x})$.

証明の概略 (uniqueness)

uniqueness. $(t,x) \in [\tau, T] \times \mathbb{R}^d$:fixed.

- $(X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})_{s\in[t,T]} \in S^2 \times S^2 \times M^2$ を任意の解とする.
- 定理 5 の証明のアイデアと同様にして, existence で構成した関数 u^ζ を用いて $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x}) = (u^\zeta(s, X_s^{t,x}), u^\zeta(s, X_s^{t,x}))$ in $S^2 \times M^2$ となる.

PDE との関係 (注意 3). Girsanov transform, Itô's formula, Lebesgue 測度の平行移動不変性, 部分積分を用いる. □

注意 4

solution の存在区間は次の意味で最適な区間 $(T_0, T]$ まで延長できる.

1. $T_0 = 0$,
2. or $\lim_{\tau\downarrow T_0}(\sup_{\tau\le s\le T}\|u(s)\|_{H^m}^2 + \int_\tau^T \|\nabla u(s)\|_{H^m}^2 ds) = \infty$.

PDE の解の uniqueness

系 1

PDE (**P**) の $C((T_0,T];H^m(\mathbb{R}^d))\cap L^2_{loc}(T_0,T;H^{m+1}(\mathbb{R}^d))$ の class の strong solution は unique.

証明. u を strong solution とする.

- $X_s^{t,x}$ を forward SDE

$$dX_s^{t,x}=[b(s,X_s^{t,x})+\alpha(s,X_s^{t,x})u(s,X_s^{t,x})]ds+\sigma(s)dW_s,\ X_t^{t,x}=x;$$

  の solution とする.
- このとき，各 $t\in(T_0,T]$ と a.e. x に対し，$(X_s^{t,x},u(s,X_s^{t,x}),\nabla u(s,X_s^{t,x}))_{s\in[t,T]}$ は FBSDE の solution.
- よって，PDE の uniqueness は FBSDE の uniqueness から従う.

まとめと今後の課題

1. σ が空間変数にも依存する場合.
2. 他の形の FBSDE,PDE.
3. “$u(t,x)$” の確率論的構成.

参考文献

- F. Delarue, On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case, Stochastic Process. Appl. 99 (2002), no. 2, 209–286.
- F. Delbaen, J. Qiu and S. Tang, Forward-backward stochastic differential systems associated to Navier-Stokes equations in the whole space, Stochastic Process. Appl. 125 (2015), no. 7, 2516-2561.
- N. El Karoui, S. Peng, M.C. Quenez, Backward stochastic differential equations in finance, Math. Finance 7 (1997), no. 1, 1-71.
- E. Pardoux, S. Tang, Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs, Probab. Theory Related Fields 114 (1999), no. 2, 123-150.
- F. Zhang, Sobolev weak solutions for parabolic PDEs and FBSDEs, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009), no. 9-10, 533–536.