

Ginibre ランダム行列の固有値の ダイナミクスについて

藪奥 哲史

千葉大学大学院 融合理工学府

2018年8月20-24日
確率論ヤングサマーセミナー

目次

- ランダム行列について
 - ▶ Wigner 行列 (GUE) と半円則
 - ▶ 非正規ランダム行列 (Ginibre) と円則

目次

- ランダム行列について
 - ▶ Wigner 行列 (GUE) と半円則
 - ▶ 非正規ランダム行列 (Ginibre) と円則
- 固有値のダイナミクスについて
 - ▶ Dyson ブラウン運動
 - ▶ Ginibre 行列のダイナミクス

目次

- ランダム行列について
 - ▶ Wigner 行列 (GUE) と半円則
 - ▶ 非正規ランダム行列 (Ginibre) と円則
- 固有値のダイナミクスについて
 - ▶ Dyson ブラウン運動
 - ▶ Ginibre 行列のダイナミクス
- 今後の研究課題

ランダム行列について

ランダム行列 … 成分が確率変数である (n 次正方) 行列

正規行列 (*i.e.* $M^*M = MM^*$) のときスペクトル定理により n 個の固有値が存在するが, 行列のサイズを大きくしたとき ($n \rightarrow \infty$), 固有値はどのように振る舞うか?(分布を考える)

まずエルミート行列を考える.

Wigner 行列と半円則

Definition 1 (Wigner 行列)

対角成分 $\{\xi_{ij}\}(i = j) : \mathbb{R}$ 値 i.i.d. 確率変数列で $E[\xi_{ij}], E[|\xi_{ij}|^2] < \infty$,

上三角成分 $\{\xi_{ij}\}(i < j) : \mathbb{C}$ 値 i.i.d. 確率変数列で対角成分と独立,

$$E[\xi_{ij}] = 0, E[|\xi_{ij}|^2] = 1$$

下三角成分 $\{\xi_{ij}\}(i > j) : \xi_{ij} := \overline{\xi_{ji}}$

とする. これらを成分にもつ エルミート行列

$$M_n := \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix}$$

を n 次 Wigner 行列という.

$\xi_{ii} \sim G_{\mathbb{R}}(0, 2), \xi_{ij}(i \neq j) \sim G_{\mathbb{R}}(0, 1)$ のとき M_n は **ガウス型直交アンサンブル (GOE)**,

$\xi_{ii} \sim G_{\mathbb{R}}(0, 1), \xi_{ij}(i \neq j) \sim G_{\mathbb{C}}(0, 1)$ のとき M_n は **ガウス型ユニタリアンアンサンブル (GUE)**

と呼ばれる.

Wigner 行列と半円則

Proposition 2 (スペクトル定理)

M_n : n 次エルミート行列

このとき $\exists \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}, \exists U_n$: n 次ユニタリ行列 s.t.

$$M_n = U_n \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} U_n^*$$

が成立する.

※エルミート行列の固有値は全て実数である.

Wigner 行列と半円則

M_n が GUE のとき固有値 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ の同時密度関数は

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(-n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

となる。(Z_n :規格化定数)

Wigner 行列と半円則

M_n が GUE のとき固有値 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ の同時密度関数は

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(-n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

となる. (Z_n :規格化定数)

↑
固有値は“反発”している!

Wigner 行列と半円則

M_n に対して固有値の経験分布 (ESD) を次で定義する:

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_i}$$

ESD は \mathbb{R} 上のランダムな確率測度であり, $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$ の固有値の分布としてみれる.

この ESD の列の $n \rightarrow \infty$ における収束を a.s. で与える:

Definition 3 (確率測度の収束 a.s.)

$\{\mu_n\}, \mu$: ランダムな確率測度

$\mu_n \rightarrow \mu$ a.s.

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x)$ a.s.

Wigner 行列と半円則

Theorem 4 (半円則 Wigner 1958)

M_n : n 次 Wigner 行列

$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n}$: 経験分布

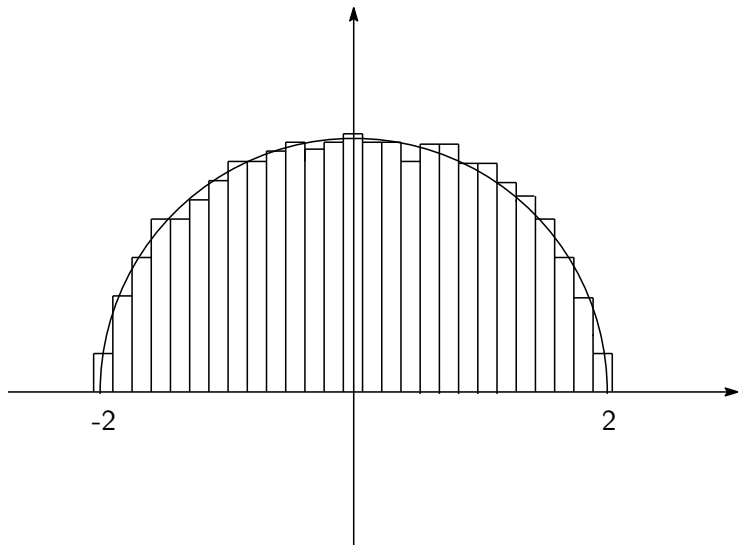
このとき

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}M_n} \rightarrow \mu_{sc} \text{ a.s.}$$

が成立する. ここで $\mu_{sc} := \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$ (otherwise 0)

※ Wigner の半円則は行列の成分の分布に依存しない. (普遍性)

Wigner 行列と半円則



非正規ランダム行列と円則

非エルミートの場合, 固有値の経験分布は収束するか?

Definition 5 (非正規ランダム行列)

$\{X_{ij}\} : \mathbb{C}$ 値 i.i.d. 確率変数列で $E[X_{11}] = 0$, $E[|X_{11}|^2] = 1$
このとき

$$X_n := \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & \dots & X_{nn} \end{bmatrix}$$

で定義される n 次正方行列を **非正規ランダム行列** と呼ぶことにする.

$X_{ij} \sim N_{\mathbb{C}}(0, 1)$ のとき X_n を **Ginibre アンサンブル** といい, X_n^{Gin} で表すことにする.

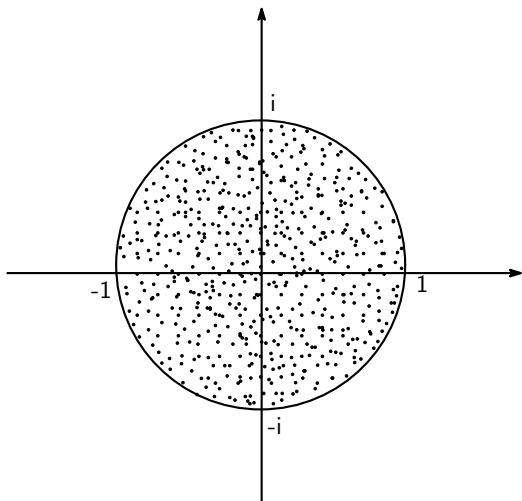
非正規ランダム行列と円則

X_n^{Gin} の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ の同時密度関数は

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z'_n} \exp\left(-n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right) \prod_{i < j}^n |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

ここで Z'_n は規格化定数.[Ginibre 1965]

非正規ランダム行列と円則



$\frac{1}{\sqrt{n}} X_n^{Gin}$ の固有値は複素単位円上で一様に観測される. [Mehta 1967]

非正規ランダム行列と円則

X_n : 非正規ランダム行列

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}(s, t) := \frac{1}{n} \#\{1 \leq i \leq N, \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_i \leq s, \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_i \leq t\}$$

を $\frac{1}{\sqrt{n}}X_n$ の固有値の \mathbb{C} 上数え上げ測度とする.

Theorem 6 (円則 Tao, Vu 2010)

X_n : 非正規ランダム行列

$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n}$: $\frac{1}{\sqrt{n}}X_n$ の固有値の経験分布

このとき

$$\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}X_n} \rightarrow \mu_{\text{cir}} \text{ a.s.}$$

が成立する. ただし μ_{cir} は複素単位円上の一様分布.

※円則は行列の成分の分布によらない (普遍性).

固有値のダイナミクスについて

ランダム行列で特に GUE と Ginibre の固有値の時間発展を考える.

<i>entry : Gaussian</i>	→	<i>Brownian Motion</i>
<i>Random Matrix(Static)</i>	→	<i>Dynamics</i>
<i>eigenvalues of GUE</i>	→	<i>Dyson BM</i>
<i>eigenvalues of Ginibre</i>	→	???

Dyson ブラウン運動

次のエルミート行列の固有値過程を考える.

$$H(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N} := \begin{cases} B_{ii}(t) & i = j \\ \frac{B_{ij}^R(t) + \sqrt{-1}B_{ij}^I(t)}{\sqrt{2}} & i < j \\ h_{ji}(t) & i > j \end{cases}, t > 0$$

ここで $B_{ii}, B_{ij}^R, B_{ij}^I (i < j)$ は N^2 個の独立な標準ブラウン運動.
 $H(t)$ は N 個の実固有値をもち, それらは次の連立 SDE を満たす:

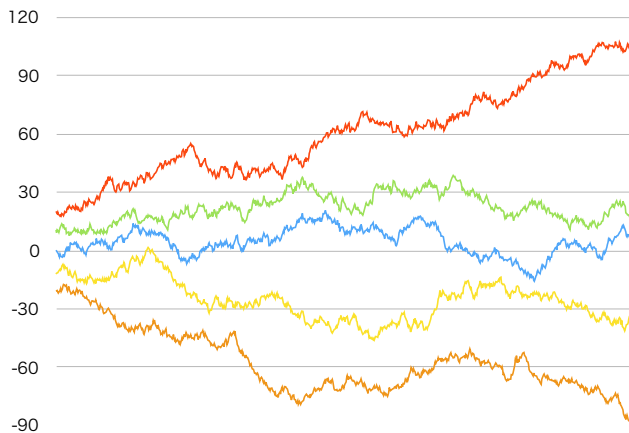
Theorem 7 (Dyson ブラウン運動 ($\beta = 2$), Dyson 1962)

$H(t)$ の N 個の実固有値 $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$ について

$$d\lambda_i(t) = dB_i'(t) + \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad i = 1, \dots, N$$

が成立する. ただし (B_1', \dots, B_N') は標準ブラウン運動.

Dyson ブラウン運動



Dyson

Ginibre 行列のダイナミクス

ここでは次の N 次正方行列

$$G(t) = (G_{kl}(t))_{1 \leq k, l \leq N}, \quad G_{kl}(t) := B_{kl}^R(t) + \sqrt{-1}B_{kl}^I(t), \quad t > 0$$

の固有値過程を求める。ただし

$B := (B_{11}^R, B_{12}^R, \dots, B_{NN}^R, B_{11}^I, B_{12}^I, \dots, B_{NN}^I)$ は $2N^2$ 次元 BM.

Ginibre 行列の固有値は複素数なので $G(t)$ の固有値を

$$\lambda_i(t) = \lambda_i^R(t) + \sqrt{-1}\lambda_i^I(t), \quad i = 1, \dots, N$$

とする。

Ginibre 行列のダイナミクス

$G(t)$ の固有値過程は “反発” をもつと期待できる.
(ランダム行列理論と Dyson BM の結果から)
Dyson BM のときは $\lambda_i(t)$ ごとに

$$\sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

という反発を表すドリフト項があった.
そこで次のようなことを考えたい.

Ginibre 行列のダイナミクス

$G(t)$ の固有値過程は “反発” をもつと期待できる。
(ランダム行列理論と Dyson BM の結果から)
Dyson BM のときは $\lambda_i(t)$ ごとに

$$\sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

という反発を表すドリフト項があった。
そこで次のようなことを考えたい。

Question

Ginibre 固有値過程は Dyson BM のときのような反発項をもつか?

Ginibre 行列のダイナミクス

$G(t)$ の固有値過程は “反発” をもつと期待できる。
(ランダム行列理論と Dyson BM の結果から)
Dyson BM のときは $\lambda_i(t)$ ごとに

$$\sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt$$

という反発を表すドリフト項があった。
そこで次のようなことを考えたい。

Question

Ginibre 固有値過程は Dyson BM のときのような反発項をもつか?

この問いに答えるために、まず $G(t)$ の固有値過程を導出する。

Ginibre 行列のダイナミクス

Dyson BM と “ $G(t)$ の固有値過程” の解析の比較

行列値過程 $H(t)$, $G(t)$ の固有値過程を考える.

$H(t)$ の場合 (Dyson BM)

$H(t)$ はエルミート (正規) 行列なのでスペクトル定理から

$$H(t) = U(t)\Lambda(t)U(t)^*,$$

$$U(t) : N \times N \text{ unitary}, \quad \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$$

と対角化できる. これに伊藤の公式を適用することで Dyson BM が得られる.

Ginibre 行列のダイナミクス

$G(t)$ の固有値過程の場合

$G(t)$ は非正規行列なので対角化できず

$$G(t) = U(t)T(t)U(t)^*, \quad U(t) : N \times N \text{ unitary,}$$

$$T(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & T_{12}(t) & T_{13}(t) & \dots & T_{1N}(t) \\ 0 & \lambda_2(t) & T_{23}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & T_{N-2N}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{N-1}(t) & T_{N-1N}(t) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_N(t) \end{bmatrix}$$

と三角化までしかできない。このまま伊藤の公式を用いると、固有値の SDE は上三角部分を含む形になる。

このような問題から正規行列に対する解析を直接用いることが難しい。

Ginibre 行列のダイナミクス

そこで左, 右固有ベクトル L_j, R_j を用いて $G(t)$ を対角化する.
 $L_j, R_j \in \mathbb{C}^N$ は

$${}^t L_j(t) G(t) = \lambda_j {}^t L_j(t), \quad G(t) R_j(t) = \lambda_j(t) R_j(t), \quad j = 1, \dots, N$$

を満たす. このとき G は $X := (R_1, \dots, R_N)$ によって

$$X(t)^{-1} G(t) X(t) = \Lambda(t), \quad X(t)^{-1} = {}^t (L_1, \dots, L_N)$$

と対角化できる. X はユニタリではないことに注意.

Remark

G が正規ならば $R_j = L_j$, X はユニタリ行列.

Ginibre 行列のダイナミクス

上で見たように $G(t)$ をユニタリ行列で三角化するか, 左 (右) 固有ベクトルを用いて対角化するという 2 通りのアプローチがある.

アプローチ		メリット	デメリット
ユニタリで三角化	→	ユニタリの直交性	上三角部分が残る
R_j, L_j で対角化	→	対角化できる	直交性がない

どちらを採用すべきか?

Ginibre 行列のダイナミクス

先行研究として成分が Ornstein-Uhlenbeck 過程の場合, 対角化を採用し伊藤の公式を用いて次が得られることが知られている.

Proposition 8 (Bourgade, Duback 2018)

$$dG_{kl}(t) = \frac{1}{\sqrt{2N}} dB_{kl}(t) - \frac{1}{2} G_{kl}(t) dt, t > 0$$

(O-U 過程) を成分にもつ $G(t)$ の固有値過程は

$$d\lambda_i(t) = dM_i(t) - \frac{1}{2} \lambda_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, N$$

を満たし, マルチンゲール M_1, \dots, M_N に対して $d\langle M_i, M_j \rangle_t = 0$,

$$d\langle M_i, \overline{M_j} \rangle_t = \frac{\mathcal{O}_{ij}(t)}{N} dt$$

が成り立つ. ただし $\mathcal{O}_{ij} := (R_j^* R_i)(L_j^* L_i)$.

Ginibre 行列のダイナミクス

$\mathcal{O}_{ij} = (R_j^* R_i)(L_j^* L_i)$ は Overlap matrix と呼ばれ, 固有値の非安定性を表す量と解釈できる.

正規行列なら右, 左固有ベクトルは等しいので $\mathcal{O}_{ij} = \delta_{ij}$ となる.

彼らの結果を成分が複素ブラウン運動の場合に応用し, $G(t)$ の固有値過程を導出したい. しかしここでも三角化, 対角化のどちらを採用するかという問題がある.

Ginibre 行列のダイナミクス

$\mathcal{O}_{ij} = (R_j^* R_i)(L_j^* L_i)$ は Overlap matrix と呼ばれ, 固有値の非安定性を表す量と解釈できる.

正規行列なら右, 左固有ベクトルは等しいので $\mathcal{O}_{ij} = \delta_{ij}$ となる.

彼らの結果を成分が複素ブラウン運動の場合に応用し, $G(t)$ の固有値過程を導出したい. しかしここでも三角化, 対角化のどちらを採用するかという問題がある.

⇒ **陰関数定理**を用いることで行列を三角化, 対角化せずに固有値過程が得られる.

Ginibre 行列のダイナミクス

N 次正方行列 $G = (G_{kl})_{1 \leq k, l \leq N}$, $G_{kl} = x_{kl} + \sqrt{-1}y_{kl}$ に対して
固有多項式 $f : \mathbb{C}^{N^2+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(x, y, \lambda) := \det(\lambda I_N - G), \lambda \in \mathbb{C}$$

で定め $f_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} f$, $\alpha = x_{kl}, y_{kl}$ とする. このとき次が成り立つ.

Proposition 9 (Y)

$G(t)$ の複素固有値 $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$ は次の SDEs を満たす:

$$d\lambda_i(t) = \sum_{k,l} \frac{-f_{x_{kl}}(B(t), \lambda_i(t))}{\prod_{j(\neq i)} (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))} dB_{kl}(t), \quad i = 1, \dots, N$$

ただし $B_{kl} := B_{kl}^R + \sqrt{-1}B_{kl}^I$.

Ginibre 行列のダイナミクス

上の命題より Ginibre の場合の固有値過程はマルチンゲールである.
さらに先ほどの問いの答えとして

Ginibre 固有値過程は Dyson BM のようなドリフト項を **もたず**,
マルチンゲール項に反発が現れる

といえる.

Ginibre 行列のダイナミクス

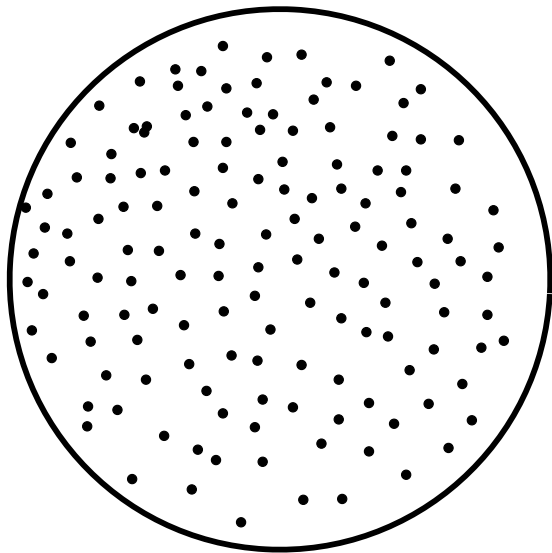
さらに確率過程 $Y_{ij}(t), t > 0, i \neq j$ を

$$Y_{ij}(t) := |\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| = \sqrt{(\lambda_i^R(t) - \lambda_j^R(t))^2 + (\lambda_i^I(t) - \lambda_j^I(t))^2}$$

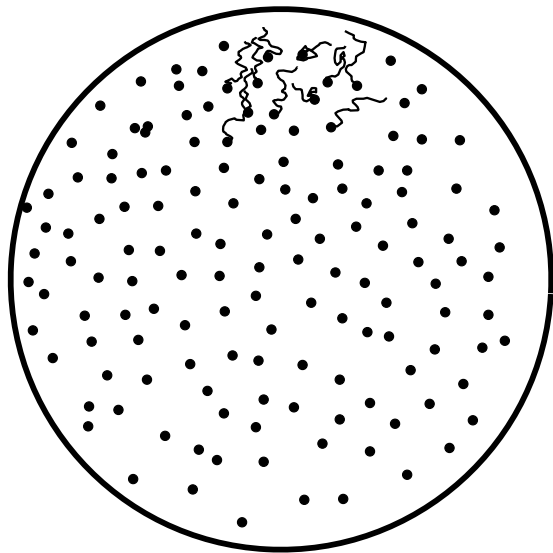
(固有値の 2 点の距離関数)

で定める.

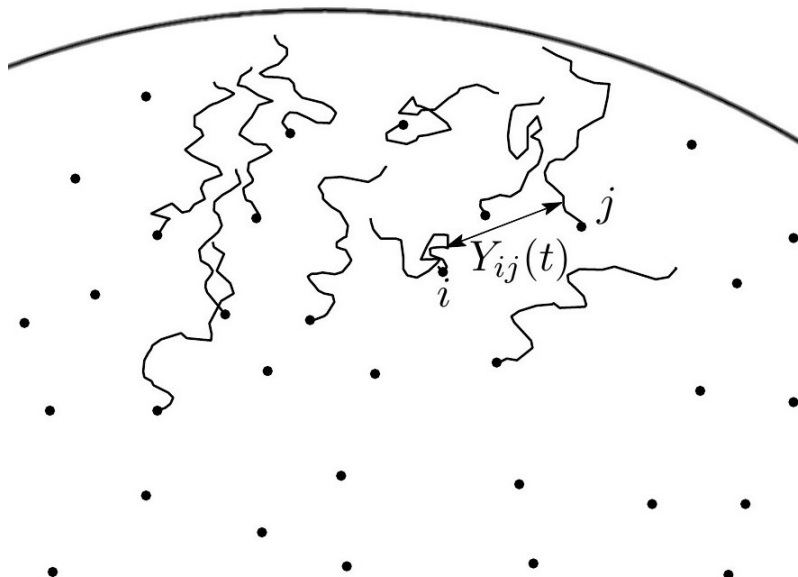
Ginibre 行列のダイナミクス



Ginibre 行列のダイナミクス



Ginibre 行列のダイナミクス



Ginibre 行列のダイナミクス

この $Y_{ij}(t)$ に対して次の特徴付けが得られる.

Theorem 10 (Y)

$$dY_{ij}(t) = dM_{Y_{ij}}(t) + \frac{\mathcal{O}_{ii}(t) + \mathcal{O}_{jj}(t) - 2\operatorname{Re}(\mathcal{O}_{ij}(t))}{2Y_{ij}(t)} dt$$

と表せて

$$\tau(t) := \inf\{u \geq 0; \langle M_{Y_{ij}} \rangle(u) > t\}$$

による時間変更で $Z_{ij}(t) := Y_{ij}(\tau(t))$ は 2次元 Bessel 過程になる:

$$dZ_{ij}(t) = dB'(t) + \frac{1}{2Z_{ij}(t)} dt$$

ただし $B'(t)$ は 1次元標準ブラウン運動.

Ginibre 行列のダイナミクス

Remark

原点出発の d 次元 Bessel 過程 $R(t)$ は

$$R(t) := \sqrt{B_1(t)^2 + \cdots + B_d(t)^2}, \quad 0 \leq t < \infty$$

で定義される. ここで B_1, \dots, B_d は独立な 1 次元標準ブラウン運動. $R(t)$ は次の SDE を満たす:

$$dR(t) = dB'(t) + \frac{d-1}{2R(t)} dt$$

ただし $B'(t)$ は 1 次元標準ブラウン運動.

今後の研究課題

- 一般の N について \mathcal{O}_{ij} 過程の構成
- N 個の固有値全体の系の動きやすさ (動きにくさ) について
- $N \rightarrow \infty$ のとき, ダイナミクスはどうなるか?
- 他の (非) 正規行列のダイナミクスはどのような反発項を持つか?

参考文献

- [1] M. L. Mehta, Random Matrices, second edition, Academic Press (1991).
- [2] J. Ginibre, Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices, Journal of Mathematical Physics, 6, 440 (1965)
- [3] T. Tao, V. Vu, Random matrices: universality of ESDs and the circular law, The Annals of Probability, Vol. 38, No. 5, 2023-2065 (2010)
- [4] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press (2005)
- [5] T. Tao, Topics in Random Matrix Theory, American Mathematical Society (2012)
- [6] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys., Vol. 3, 1192-1198 (1962)
- [7] P. Bourgade, G. Dubach, The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices, arXiv:1801.01219v1 (2018)
- [8] J. T. Chalker and B. Mehlhig, Eigenvector statistics in non-Hermitian random matrix ensembles, Phys. Rev. Lett. 81, no. 16, 3367-3370 (1998)
- [9] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer (1991)

ご静聴ありがとうございました.