Intersection local time に関する話題

森 隆大

京都大学 理学研究科 (数理解析研究所) D1

2018/08/22　確率論ヤングサマーセミナー

Introduction

Intersection local time とは？

1. (ランダムウォーク) $S^{(1)}$, $S^{(2)}$: $\mathbb{Z}^d$ 上の独立なランダムウォーク
   N ステップまでの, 場所 x での交差の回数:

$$\ell_N(\{x\}) := \sum_{n,m=0}^{N} 1_{\{x=S_m^{(1)}\}} 1_{\{x=S_n^{(2)}\}}$$

2. (ブラウン運動) $B^{(1)}$, $B^{(2)}$: $\mathbb{R}^d$ 上の独立なブラウン運動
   時刻 t までの, 場所 x で交差した時間:

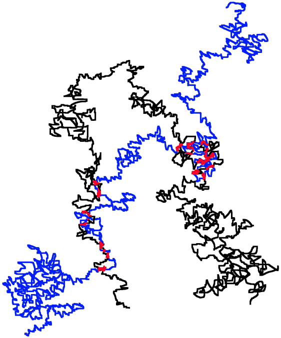
$$\begin{aligned}\ell_t(dx) \text{“}=\text{''} &\int_{[0,t]^2} \delta_x(B_{s_1}^{(1)})\delta_x(B_{s_2}^{(2)})ds_1 ds_2 \\ &= L_t^{(1)}(x)L_t^{(2)}(x) \quad (d=1\text{ のとき})\end{aligned}$$

ランダム測度 ℓ_t が, $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し

$$\ell_t(A) \text{``}=\text{''} \int_A \left[\int_{[0,t]^2} \delta_x(B^{(1)}_{s_1}) \delta_x(B^{(2)}_{s_2}) ds_1 ds_2 \right] m(dx)$$

$$=(A \text{ での赤点の ``滞在時間''})$$

により形式的に定まる.



ブラウン運動の軌跡に関する事実

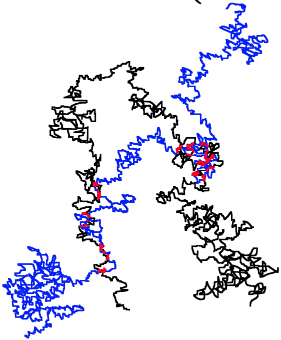
Theorem ([Dvoretsky, Erdős, Kakutani, Taylor, '54], etc.)

$B^{(1)}, \cdots, B^{(p)}$ を独立な d 次元ブラウン運動とする．このとき，

$$d - p(d-2) > 0 \quad \text{iff} \quad B^{(1)}(0,\infty) \cap \cdots \cap B^{(p)}(0,\infty) \neq \emptyset \text{ a.s.}$$

$p \geq 2$ に対し，

$$d - p(d-2) > 0 \quad \text{iff} \quad \begin{cases} p \geq 2 & \text{when } d = 1, 2 \\ p = 2 & \text{when } d = 3 \end{cases}$$



本講演の目的

Intersection local time ℓ_t の性質を, 次の観点から紹介する:

- ランダム測度として見たときの漸近挙動 (大偏差原理)
- Tanaka formula の拡張とみなせる確率解析的側面
- ガウス自由場との関連 (Dynkin isomorphism)

それぞれの話題は独立している.
本講演では, 簡単のため, 主に $p = 2$ の場合のみを触れる.

Asymptotic behavior (1)

復習: 大偏差原理
位相空間 S-値確率変数列 $\{Z_n\}_n$ がレート函数 $I : S \to [0, \infty]$ で大偏差原理を満たすとは, 次が成立することをいう: 任意の Borel 集合 $\Gamma \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$
\begin{aligned}
-\inf_{x \in \mathrm{int}(\Gamma)} I(x) &\leq \liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_t(Z_t \in \Gamma) \\
&\leq \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_t(Z_t \in \Gamma) \leq -\inf_{x \in \overline{\Gamma}} I(x).
\end{aligned}
$$

以降, これを $\mathbb{P}(Z_n \approx z) \approx \exp\{-tI(z)\}$ と略記する.

Asymptotic behavior (2)

$D \subset \mathbb{R}^2$ を境界が滑らかな有界領域, $B^{(1)}, \cdots, B^{(p)}$ を独立な 2 次元ブラウン運動, $\tau^{(i)} := \inf\{t > 0 : B_t^{(i)} \notin D\}$ (脱出時刻), $\ell_t^{(i)}(A) = \int_0^t 1_A(B_s^{(i)})ds$ (滞在時間) とする.

Theorem (König, Mukherjee, 2013)

$\mathcal{M}_f(D) \times (\mathcal{M}_1(D))^p$ -値の確率変数列 $\left(\frac{1}{t^p}\ell_t; \frac{1}{t}\ell_t^{(1)}, \cdots, \frac{1}{t}\ell_t^{(p)}\right)$ に対して, $t \to \infty$ で次の大偏差原理が成立する:

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{t^p}\ell_t; \frac{1}{t}\ell_t^{(1)}, \cdots, \frac{1}{t}\ell_t^{(p)}\right) \approx \boldsymbol{\mu} \;\middle|\; t < \tau^{(1)} \wedge \cdots \wedge \tau^{(p)}\right) \approx e^{-t\mathbf{I}(\boldsymbol{\mu})}.$$

ここで $\boldsymbol{\mu} = (\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p) \in \mathcal{M}_f(D) \times (\mathcal{M}_1(D))^p$ に対し $\mathbf{I}(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p)$

$$:= \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \|\nabla\psi_i\|_{L^2}^2 - \lambda^{(i)} & \text{if } \psi_i = \sqrt{\dfrac{d\mu_i}{dm}} \in H_0^1(D) \text{ and } \prod_{i=1}^{p} \dfrac{d\mu_i}{dm} = \dfrac{d\mu}{dm}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Asymptotic behavior (3)

より一般には, 局所コンパクト可分距離空間 (例えば, リーマン多様体やシェルピンスキーのギャスケット) 上のハント過程について, 推移確率が (劣-) ガウス型や跳躍型 (安定過程と同様な形) の評価を持つときに, 同様な大偏差原理が成立する [M.]:

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{t^p}\ell_t; \frac{1}{t}\ell_t^{(1)}, \cdots, \frac{1}{t}\ell_t^{(p)} \right) \approx \boldsymbol{\mu} \;\middle|\; t < \zeta^{(1)} \wedge \cdots \wedge \zeta^{(p)} \right) \approx e^{-t\mathbf{I}(\boldsymbol{\mu})}.$$

ここで $\boldsymbol{\mu} = (\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p) \in \mathcal{M}_f(E) \times (\mathcal{M}_1(E))^p$ に対し

$$\mathbf{I}(\mu; \mu_1, \cdots, \mu_p) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \mathcal{E}^{(i)}(\psi_i, \psi_i) - \lambda^{(i)} & \text{if } \psi_i = \sqrt{\frac{d\mu_i}{dm}} \in \mathcal{F}^{(i)} \text{ and } \prod_{i=1}^{p} \frac{d\mu_i}{dm} = \frac{d\mu}{dm}, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Stochastic calculus approach (1)

復習: Tanaka formula

B を 1 次元 BM とすると, a.s. で任意の $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$|B_t - x| - |B_0 - x| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - x) dB_s + L(x, t)$$

目標

Intersection local time に対しても確率積分を用いた表現が欲しい.

Stochastic calculus approach (2)

Theorem (Bass, Khoshnevisan, 1993)

B, $\widetilde{B}$ を独立な 2 次元 BM とする．このとき, a.s. で $t > 0$ に対し

$$\int_0^t G(\widetilde{B}_t - B_r)dr - \int_0^t G(\widetilde{B}_0 - B_r)dr = \int_0^t \left[\int_0^t \nabla G(\widetilde{B}_s - B_r)dr \right] d\widetilde{B}_s + \ell_t(\mathbb{R}^2).$$

ここで $G(x) = -\log|x|$, $x \in \mathbb{R}^2$.

形式的には $\ell_t(\mathbb{R}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_0^t \int_0^t \delta_x(\widetilde{B}_s)\delta_x(B_r)drds \right] dx$.

$d = 2, p \geq 3$, $d = 3, p = 2$ の場合も同様な結果が成立.

直感的な説明: $\Delta G(x) = \delta_0(x)$ と思って, $f(y) = \int_0^t G(y - B_r)dr$ に伊藤の公式を適用する.

Stochastic calculus approach (3)

derivative of intersection local time

Theorem (Yan, Yu, Chen, 2017)

B, $\widetilde{B}$ を独立な 1 次元 BM とし, $t > 0$ とする．このとき, 任意の $p \geq 1$ に対し L^p-極限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \int_0^t f_\varepsilon'(B_s - \widetilde{B}_r) drds$$

が存在する．ただし, $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$.

上の極限の 1/2 倍を $\int_0^t \int_0^s \delta'(B_s - \widetilde{B}_r) drds$ とかくと, 形式的に次が成立:

$$\int_0^t 1_{[0,\infty)}(\widetilde{B}_t - B_s) ds - \int_0^t L^B(\widetilde{B}_s, s) d\widetilde{B}_s$$
$$= \int_0^t 1_{[0,\infty)}(\widetilde{B}_s - B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s \delta'(\widetilde{B}_s - B_s) drds.$$

Stochastic calculus approach (4)

Derivative of intersection local time ℓ' に対しては, ブラウン運動以外でも解析がされている:

- [Rosen, 2005] derivative of self-intersection local time
- [Yan, Yu, Chen, 2016] 1 次元, 対称安定過程
- [Jung, Markowsky, 2014] fractional BM

Dynkin isomorphism (1)

簡単のため次元は $d = 1$ とする．($d = 2$ でも結論は成立)

目標

- (Dynkin isomorphism) local time と，“1-potential の 2 乗 $g_1(x, y)^2$ を共分散とする平均 0 の確率過程” との間の対応
- (Dynkin isomorphism の self-intersection 版)
  2-fold self-intersection local time と，“$g_1(x, y)^4$ を共分散とする平均 0 の確率過程” との間の対応

記号

測度の集合 $\mathcal{G}^n = \left\{ \mu : \iint g_1(x, y)^n \mu(dx)\mu(dy) < \infty \right\}$.

$\{G(\mu) : \mu \in \mathcal{G}^1\}$ を，$\mathcal{G}^1$ をパラメータとするガウス過程で，平均 0，共分散

$$\mathbb{E}_G[G(\mu)G(\nu)] = \iint g_1(x, y)\mu(dx)\nu(dy)$$

なるものとする．

Dynkin isomorphism (2)

記号 (続き)

ブラウン運動 B は初期分布 ρ で, G と独立なものとする. この確率測度を $\mathbb{E}^\rho$ でかく.

λ は G, B と独立なパラメータ 1 の指数分布とし, B と λ に関する確率測度を改めて $\mathbb{E}^\rho_\lambda$ とかく.

L^μ_t を Revuz 測度 μ の, ブラウン運動に関する加法汎関数とする.
(特に 1 次元のときは
$L^\mu_t = \int L(x,t)\mu(dx)$ "$=$" $\int \int_0^t \delta_x(B_s)ds\mu(dx)$).

Second order Gaussian chaos $\{H(\mu) : \mu \in \mathcal{G}^2\}$ を

$$H(\mu) = G(\mu)^2 - \mathbb{E}_G[G(\mu)^2]$$

で定める. このとき次を満たす:

$$\mathbb{E}_G[H(\mu)] = 0, \quad \mathbb{E}_G[H(\mu)H(\nu)] = \iint g_1(x,y)^2 \mu(dx)\mu(dy).$$

Dynkin isomorphism (3)

Theorem (Dynkin isomorphism, Marcus, Rosen, 1999)

$\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}^2$ とし, $L^{\mu} = \{L_{\lambda}^{\mu_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $H(\mu) = \{H(\mu_i)\}_{i=1}^{\infty}$ とかく. $f > 0$ を有界, 一様連続, 可積分な函数, F を $\mathbb{R}^{\infty}$ 上の非負可測函数とすると, 次が成立:

$$\mathbb{E}_G \mathbb{E}_{\lambda}^{\rho}\left[F\left(\frac{1}{2}H(\mu) + L^{\mu}\right) f(B_{\lambda})\right] = \mathbb{E}_G\left[F\left(\frac{1}{2}H(\mu)\right) G_{\rho} G_{f \cdot dx}\right].$$

つまり, 2 つの確率過程

$$\left\{\tfrac{1}{2}H(\mu) + L(\mu) : \mu \in \mathcal{G}^2\right\} \text{ under the measure } f(B_{\lambda})\mathbb{P}_G \otimes \mathbb{P}_{\lambda}^{\rho},$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}H(\mu) : \mu \in \mathcal{G}^2\right\} \text{ under the (signed measure) } G_{\rho} G_{f \cdot dx}\mathbb{P}_G$$

は同分布である.

Theorem (Marcus, Rosen, 1999)

$\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{G}^4$ とし, f, F は先と同じものとすると,

$$\mathbb{E}_G \mathbb{E}_\lambda^\rho \left[F\left(\frac{:G^4\mu:}{4} + (:G^2: \times \mathcal{L}_1)(\mu) + \mathcal{L}_2(\mu) \right) f(B_\lambda) \right] = \mathbb{E}_G \left[F\left(\frac{:G^4\mu:}{4} \right) G_\rho G_{f\cdot dx} \right].$$

ここで, $:G^n\mu:$ は generating function equation

$$\exp\left(\lambda G(\mu) - \lambda^2 \frac{\mathbb{E}[G(\mu)^2]}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} :G^n\mu:$$

の右辺にあらわれる確率変数 ($G(\mu)$ の n-th Wick power) であり, (特に $\mathbb{E}_G[:G^{2n}\mu:] = 0$ かつ

$$\mathbb{E}_G[(:G^{2n}\mu:)(:G^{2n}\nu:)] = (2n!) \iint g_1(x,y)^{2n} \mu(dx)\nu(dy).)$$

左辺の 2・3 項は大雑把に言えば, local time, self-intersection local time, $:G^2:$ の 2 次までのある多項式.

References

- [Bass, Khoshnevisan, 1993] Intersection local times and Tanaka formulas. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.
- [Chen, Xia; Rosen, 2005] Exponential asymptotics for intersection local times of stable processes and random walks. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.
- [Dvoretzky; Erdős; Kakutani; Taylor: 1957] Triple points of Brownian paths in 3-space. Proc. Cambridge Philos. Soc.
- [König; Mukherjee: 2013] Large deviations for Brownian intersection measures. Comm. Pure Appl. Math.
- [Marcus, Rosen, 1999] Renormalized self-intersection local times and Wick power chaos processes. Mem. Amer. Math. Soc.
- [Mori, 2018] Large deviations for intersection measures of some Markov processes. arXiv:math.PR/1805.07945.
- [Rosen, 2005] Derivatives of self-intersection local times. Lecture Notes in Math. 1857.
- [Yan, Yu, Chen, 2017] Derivative of intersection local time of independent symmetric stable motions. Statist. Probab. Lett.