待ち行列(複数窓口) M/M/2における稼働期間の分布

高橋正

愛知教育大学

2018/8/24

目次

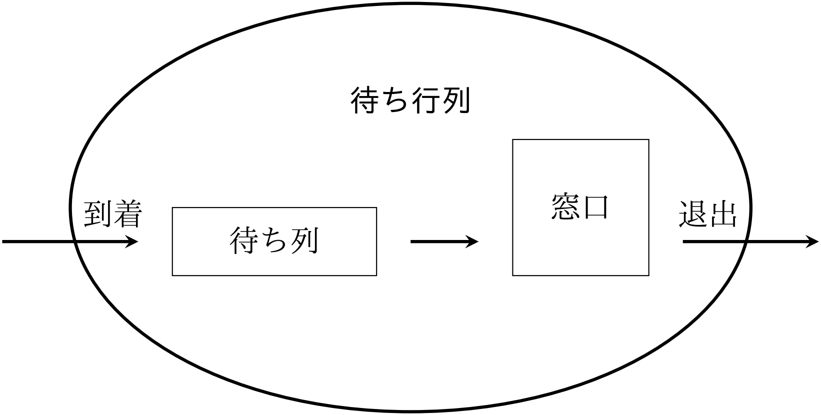
待ち行列理論とは

待ち行列理論とは,

- 到着した客が並ぶ待ち列
- 処理する順番を決める規律
- 客の到着分布やサービス時間分布
- 店の容量上限など, その他の追加要素

を設定し, 客の待ち時間や系内数, 窓口が稼働する期間などを確率的に解析することを目標としている.

待ち行列とは



待ち行列理論とは

ケンドール記号

$$A/B/s$$

$$\begin{cases} A & : & \text{到着間隔の分布} \\ B & : & \text{サービス時間の分布} \\ s & : & \text{窓口の個数} \end{cases}$$

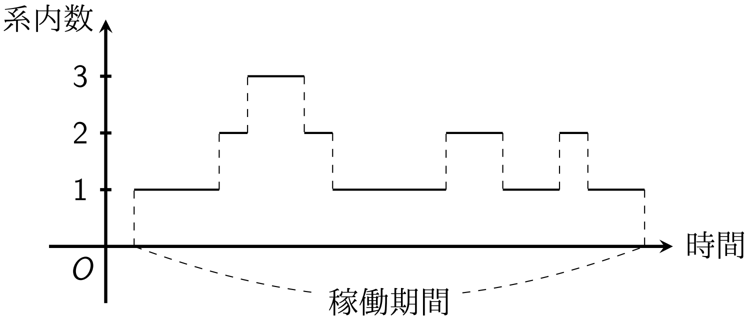
分布の記号

記号	分布
M	指数分布
$G(GI)$	(独立な) 一般の分布
E_k	k 次アーラン分布
D	定数 (一点分布)

待ち行列とは

稼働期間

空の系に客が到着してから, 最初に系が空になるまでの時間間隔を稼働期間という.



現在取り組んでいるモデル

待ち行列システムの詳細

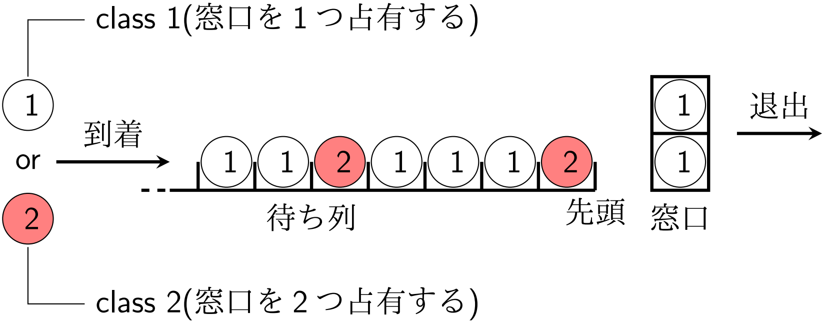
窓口数	:	2
容量制限	:	なし
規律	:	先着順

客の種類

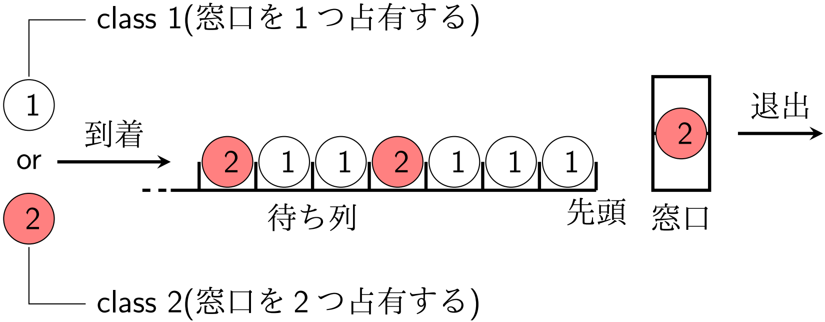
次の 2 種類の客が待ち行列システムに到着する.

客	到着時間 T^i	サービス時間 S^i	占有する窓口
class 1	$T^1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$S^1 \sim \mathrm{Exp}(\mu)$	1
class 2	$T^2 \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$	$S^2 \sim \mathrm{Exp}(\delta)$	2

現在取り組んでいるモデル



現在取り組んでいるモデル



何を知りたいか

このモデルを通してまず解析したいこと

- class 2 の客の待ち時間の分布 · 期待値
- 窓口の稼働期間の分布 · 期待値

必要なこと (今回の目的)

- class 1 の客が複数窓口で処理されるときの稼働期間の分布
  $\rightsquigarrow$ M/M/2 の稼働期間の分布

記号・ルール

M/M/2 用に記号を再定義する.

- 客の種類
  $\rightsquigarrow$ class 1 の客のみ
- 窓口数は 2
- 到着時間分布 $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
- サービス時間分布 $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

※　ただし,$\lambda < 2\mu$ とする.

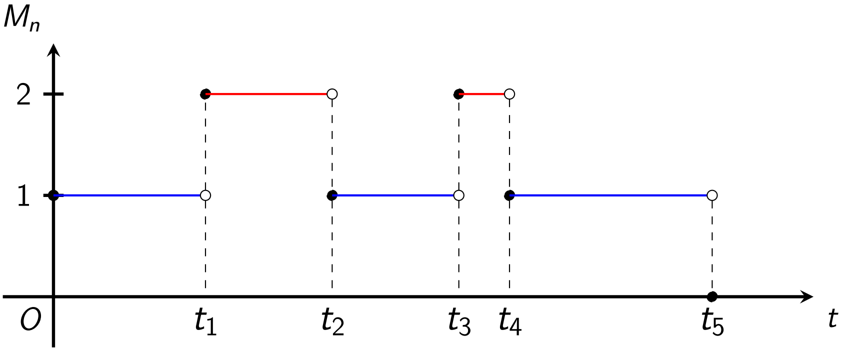
記号・ルール

今, 時刻 $t_0 = 0$ で系に初めての客が到着したとする.

$$
\begin{aligned}
t_n &: \ n \text{ 回目の使用窓口数の変更時刻} \\
M_n &: \ [t_{n-1}, t_n) \text{ 間の使用窓口数 } (n \geq 1) \\
N_0 &= \min\{n | M_n = 0\}
\end{aligned}
$$

記号・ルール

$N_0 = 6$ のときの図



記号・ルール

使用窓口数が 1 の時間

$$U_n := \int_{t=0}^{\infty} 1_{\{M_n=1\}}(t)dt, \quad U := \sum_{n=1}^{N_0} U_n$$

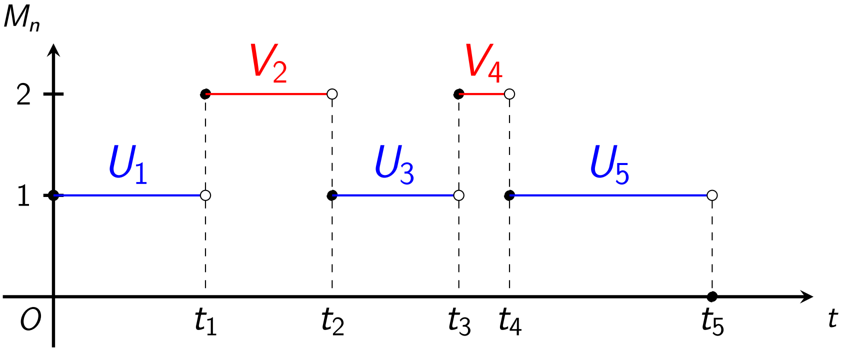
使用窓口数が 2 の時間

$$V_n := \int_{t=0}^{\infty} 1_{\{M_n=2\}}(t)dt, \quad V := \sum_{n=1}^{N_0} V_n$$

$U + V$ が求めたい稼働期間の長さである

記号・ルール

$N_0 = 6$ のときの図



U の分布

定理 1

$k \geq 1$ に対して

$$\mathrm{P}(N_0 = 2k) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}$$

定理 2

$N_0 = 2k$ $(k \leq 1)$ のとき,$t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}tU} \middle| N_0 = 2k\right] &= \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(U_1+U_3+\cdots+U_{2k-1})} \middle| N_0 = 2k\right] \\ &= \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}\right)^k\end{aligned}$$

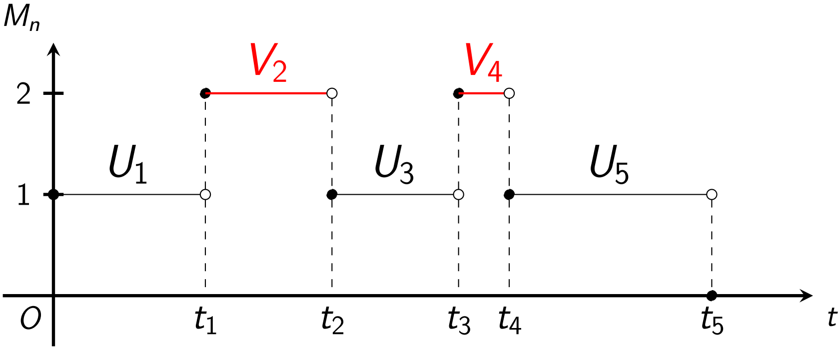
V の分布

$M_n = 2$ のときの記号

$$\begin{aligned} \tau_i &: Q_i \text{人分の客が退出する時間間隔} \\ Q_i &: \tau_{i-1} \text{の間に到着した客数} \,(Q_1 = 1) \\ I_0 &= \min\{i | Q_i = 0\} \end{aligned}$$

連続して窓口が 2 であり続ける時間 V_j の分布を求める.

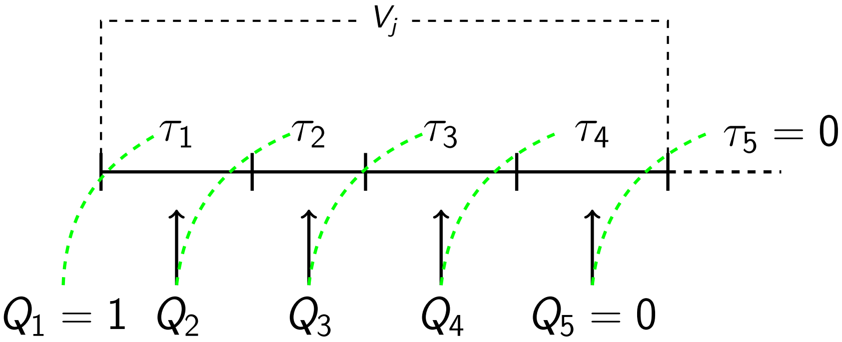
V の分布



V の分布

$l_0 = 5$ の場合

τ:処理時間



Q:到着客数

V の分布

$M_n = 2$ のときの記号

$$
\begin{array}{rcl}
\tau_i & : & Q_i\text{人分の客が退出する時間間隔} \\
Q_i & : & \tau_{i-1}\text{の間に到着した客数}\,(Q_1 = 1) \\
I_0 & = & \min\{i | Q_i = 0\}
\end{array}
$$

$j \geq I_0$ に対しては $\tau_j = 0, Q_j = 0$ とすると,
$\{Q_i\}$ は 0 を吸収壁とする, 斉次マルコフ連鎖である

V の分布

定理 3

$\{Q_i\}$ の推移確率は次で与えられる

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Q_{i+1} = l \mid Q_i = r) &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} \frac{(2\mu)^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-2\mu t} dt \\ &= \binom{l+r-1}{l} p^l q^r \end{aligned}$$

ただし, $p = \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$, $q = \dfrac{2\mu}{\lambda + 2\mu}$ とする

V の分布

定理 3 より $A_n := \mathrm{E}[e^{-t(Q_2+\cdots+Q_{n+1})}]$ とすると,
$\{A_n\}_{n\geq 1}$ は次の漸化式を満たす.

$$A_{n+1} = \frac{q}{1-pe^{-t}A_n}$$

さらに,$\{A_n\}_{n\geq 1}$ は単調減少かつ正の数である.

V の分布

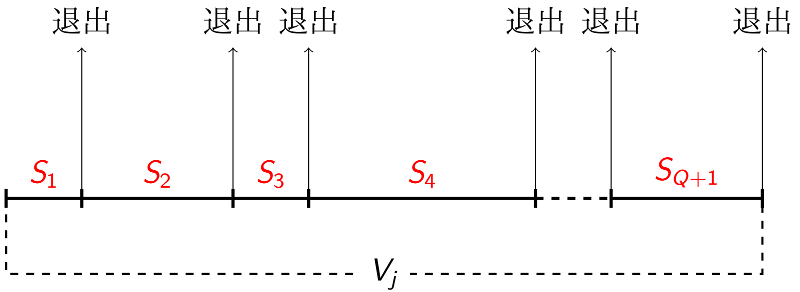
定理 4

$Q = \sum_{i=2}^{\infty} Q_i$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{-tQ}\right] &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqe^{-t}}}{2pe^{-t}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{q}{n+1} (pqe^{-t})^n \\
\therefore \mathrm{P}(Q = n) &= \binom{2n}{n} \frac{q}{n+1} (pq)^n
\end{aligned}
$$

V の分布

使用窓口が 2 の間の退出間隔を退出順に $S_1, S_2, \ldots$ とすると
$S_i \sim \mathrm{Exp}(2\mu)$ なので



V の分布

$$
\begin{aligned}
f(x)dx &:= \mathrm{dP}(V_j < x) \\
&= \mathrm{dP}(S_1 + \cdots + S_{Q+1} < x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{dP}(S_1 + \cdots + S_n < x | Q = n-1)\mathrm{P}(Q = n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2\mu)^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-2\mu x} dx \right] \binom{2n-2}{n-1} \frac{q}{n} (pq)^{n-1}
\end{aligned}
$$

V の分布

V_i の特性関数 $\phi(t) := \mathrm{E}[e^{\mathrm{i}tV_i}] = \int e^{\mathrm{i}tx} f(x) dx$ は

$$\phi(t) = \frac{1-\sqrt{1-\frac{8\mu pq}{2\mu - \mathrm{i}t}}}{2p}$$

で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}tV} | N_0 = 2k\right] &= \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(V_2+V_4+\cdots+V_{2k-2})} | N_0 = 2k\right] \\ &= \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}tV_1}\right]^{k-1} \\ &= \{\phi(t)\}^{k-1} \end{aligned}$$

U+V の分布

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(U+V)} | N_0 = 2k\right] &= \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}\right)^k \{\phi(t)\}^{k-1} \\
\mathrm{P}(N_0 = 2k) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

より,

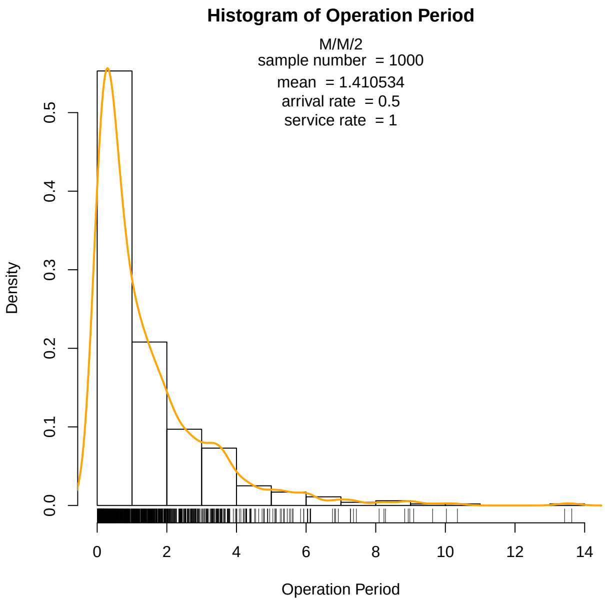
$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(U+V)}\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(U+V)} | N_0 = 2k\right] P(N_0 = 2k) \\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\phi(t)}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

U+V の分布

$$|\lambda+\mu-\mathrm{i}t|-|\lambda\phi(t)|>\sqrt{(\lambda+\mu)^2+t^2}-\lambda>0$$

より $|\frac{\lambda\phi(t)}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}|<1$ なので

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}t(U+V)}\right] &= \frac{\mu}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}\frac{1}{1-\frac{\lambda\phi(t)}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t}} \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu-\mathrm{i}t-\lambda\phi(t)}\end{aligned}$$


Histogram of Operation Period
M/M/2
sample number = 1000
mean = 1.410534
arrival rate = 0.5
service rate = 1
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
Operation Period

今後の課題

- 今回求めた分布の末尾部分の挙動などの特性
- M/M/2 における最初に数人系内にいるときの稼働期間
- 目標となるのモデルの解析

参考文献

[1] 待ち行列, 鈴木武次,1972

[2] 待ち行列理論の基礎と応用 29, 塩田茂雄・河西憲一・豊泉洋・会田雅樹,2014