強い長距離相関を持つ確率調和振動子鎖モデルにおける異常拡散について

須田 颯 (東大数理)

2018 年 8 月 21 日

イントロダクション

- 振動子鎖モデルの紹介 (nearest neighbor の場合)
  数学的定義, どのような物理現象をモデル化しているのか, 「調和」の意味?
- どのような問題を考えるのか.
  異常拡散現象について, エネルギー分布に関する流体力学極限.
- 先行研究の結果について
  証明のスケッチ

振動子鎖モデル $\{p_x(t), q_x(t)\}_x$

$\mathbf{S} = \mathbb{Z}, \{1, 2, \cdots, N\}, \mathbb{T}_N$ とする．ただし，$\mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.
$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x\in\mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$ は次のように定義されるハミルトン系とする．

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) & = \partial_{p_x} \mathcal{H}(p(t), q(t)) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) & = -\partial_{q_x} \mathcal{H}(p(t), q(t)) \end{cases}$$

ここで，

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{x\in\mathbf{S}} \frac{1}{2}|p_x|^2 + V(q_x - q_{x+1})$$

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ smooth$$

p_x:x 番目の粒子の運動量，q_x:x 番目の粒子の位置

振動子鎖モデル

$$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x\in\mathbf{S}} \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbf{S}}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) & = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) & = -V'(q_x(t) - q_{x+1}(t)) + V'(q_{x-1}(t) - q_x(t)) \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(p,q) = \sum_{x\in\mathbf{S}} \frac{1}{2}|p_x|^2 + V(q_x - q_{x+1})$$

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ smooth$$

p_x:x 番目の粒子の運動量, q_x:x 番目の粒子の位置

振動子鎖モデル:ノート

- 振動子鎖モデルは固体の熱伝導の微視的なモデル．ナノチューブ, ナノワイヤーなど.
- $e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x|^2 + \frac{V(q_{x-1}-q_x)+V(q_x-q_{x+1})}{2}$:x 番目の粒子のエネルギー
  $\sum_x e_x$ は時間発展で保存. $\mathbf{S} = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{T}_N$ なら, $\sum_x p_x$ も保存.
- 相互作用ポテンシャル V によって様々なモデルが得られる．特に重要なのは,
  $V(y) := \frac{1}{2}y^2$: 調和振動子鎖
  $V(y) := \frac{1}{2}y^2 + a_1 y^3 + a_2 y^4$: FPU-Chain, 非線形系の代表例

調和振動子鎖モデル ($V(y) = \frac{1}{2}y^2$)

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}$, $\{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt} q_x(t) & = p_x(t) \\
\frac{d}{dt} p_x(t) & = q_{x+1}(t) + q_{x-1}(t) - 2q_x(t) \\
 & = (\Delta q)_x(t)
\end{cases}
$$

$$
\mathcal{H}(p, q) = \sum_{x \in \mathbf{S}} \frac{1}{2}|p_x|^2 + \frac{1}{2}(q_x - q_{x+1})^2
$$

非調和振動子鎖モデル ($V(y) = \frac{1}{2}y^2 + a_1 y^3 + a_2 y^4$)

Fermi-Pasta-Ulam Chain (FPU Chain)

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}$, $\{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) & = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) & = -V'(q_x(t) - q_{x+1}(t)) + V'(q_{x-1}(t) - q_x(t)) \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(p,q) = \sum_{x \in \mathbf{S}} \frac{1}{2}|p_x|^2 + (q_x - q_{x+1})^2 + a_1(q_x - q_{x+1})^3 + a_2(q_x - q_{x+1})^4$$

振動子鎖モデル:ノート

- 振動子鎖モデルは固体の熱伝導の微視的なモデル. ナノチューブ, ナノワイヤーなど.
- $e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x|^2 + \frac{V(q_{x-1}-q_x)+V(q_x-q_{x+1})}{2}$:x 番目の粒子のエネルギー
  $\sum_x e_x$ は時間発展で保存. $\mathbf{S} = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{T}_N$ なら, $\sum_x p_x$ も保存.
- 相互作用ポテンシャル V によって様々なモデルが得られる. 特に重要なのは,
  $V(y) := \frac{1}{2}y^2$: 調和振動子鎖
  $V(y) := \frac{1}{2}y^2 + a_1 y^3 + a_2 y^4$: FPU-Chain, 非線形系の代表例
- FPU-Chain では熱の異常拡散 (フーリエの法則の破れ) が見られる.[Lepri-Livi-Politi-97]

フーリエの法則

$$j(y,t) = -\kappa \partial_y T(y,t), \quad y \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

$j(y,t)$: local energy current, $T(y,t)$: local temperature, κ: 熱伝導率
$e(y,t)$: local energy density, c : 熱容量 とすると, 次の式が成り立つ.

$$\partial_t e(y,t) + \partial_y j(y,t) = 0$$

$$e(y,t) = cT(y,t), \quad y \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

フーリエの法則

- フーリエの法則が成立するとき, 熱は正常拡散する.

$$\partial_t e(y,t) = \frac{\kappa}{c}\Delta_y e(y,t)$$

- FPU-Chain では, N 個の粒子からなる系で定義された熱伝導率 κ_N が $\kappa_N \sim N^\alpha, \ N \to \infty. \ (0 < \alpha < 1)$
- FPU-Chain の巨視的な熱拡散は正常拡散ではない.
  → 方程式を具体的に得ることができるか？

問

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \sum_{x \in \mathbf{S}} e(x, t/\epsilon^a) \delta_{\epsilon x} = \exists \mathbf{e}(y, t) dy$$

非自明な極限 $\mathbf{e}$ が存在するような a を求める. また, $\mathbf{e}$ が満たす PDE を求める.

問に対する予想

- $a = 3/2$ or $5/3$

$$\partial_t \mathbf{e}(u,t) = -(-\Delta_u)^{\alpha/2}\mathbf{e}(u,t)$$

  nearest neighbor の場合. 物理側からの Conjecture. [Spohn-14]
  V:対称なら $a = 3/2$, 非対称なら $a = 5/3$. 2 つの universality class がある.
- 系が低次元であること, 系全体のエネルギー以外に保存量があることが本質的な条件？(信念)
- 決定論的な時間発展をする非線形系の解析は困難.
  (エルゴード性の欠如, 特徴量の具体的計算)
  ← 近年は調和鎖に確率的な摂動を加えたモデルの解析が進められている.

調和振動子鎖モデル

$$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x\in\mathbf{S}} \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbf{S}}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) & = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) & = (\Delta q)_x(t) \end{cases}$$

確率調和振動子鎖モデル

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}$, $\{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$\begin{cases} dq_x(t) & = p_x(t)dt \\ dp_x(t) & = (\Delta q)_x(t)dt + \frac{\gamma}{2}\Delta(4p_x(t) + p(x+1,t) + p(x-1,t))dt \\ & \quad + \sqrt{\gamma}\sum_{z;|z-x|\leq 1}(Y_x p_x(t))dw_{x+z} \end{cases}$$

ここで, $\gamma > 0$ は摂動の強さ, $\{w_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}$ は i.i.d. 標準ブラウン運動,

$$Y_x = (p_x - p_{x+1})\partial_{p_{x-1}} + (p_{x+1} - p_{x-1})\partial_{p_x} + (p_{x-1} - p_x)\partial_{p_{x+1}}$$

確率調和振動子鎖モデル

$\{p_x(t), q_x(t); t \geq 0, x \in \mathbf{S}\}$: $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$ 上のマルコフ過程
生成作用素 $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \gamma \mathcal{S}$

$$\mathcal{A} = \sum_{x \in \mathbf{S}} p_x \partial_{q_x} + (\Delta q)(x) \partial_{p_x}, \ \mathcal{S} = \frac{1}{6} \sum_{x \in \mathbf{S}} (Y_x)^2$$

$$Y_x = (p_x - p_{x+1}) \partial_{p_{x-1}} + (p_{x+1} - p_{x-1}) \partial_{p_x} + (p_{x-1} - p_x) \partial_{p_{x+1}}$$

初期分布に次の仮定をおく.

$$\sup_{0<\epsilon<1} \epsilon \mathbb{E}_\epsilon [\mathcal{H}(p(\cdot, 0), q(\cdot, 0))] < \infty$$

確率調和振動子鎖モデル:ノート

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x\in\mathbf{S}} \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

生成作用素 $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \gamma\mathcal{S}$

- Basile-Bernardin-Olla-09, Jara-Komorowski-Olla-15 等で用いられているモデル.
- 確率的ダイナミクスは系全体のエネルギー, 運動量を保存する.
- B-B-O-09 により, $\kappa_N \sim N^{\frac{1}{2}}$, $N \to \infty$ が示された.

調和確率振動子鎖モデル:先行結果

Theorem (Jara-Komorowski-Olla-15)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_\epsilon[e(x,0)]\delta_{\epsilon x}=\mathbf{e}_0(u)du,\ \mathbf{e}_0\in\mathbb{L}^1$$

を仮定する．更に，ある初期分布の有界性の仮定の元で，任意の $J\in C_0^\infty(\mathbb{R}), t\geq 0$ に対して

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}E_\epsilon[e(x,t/\epsilon^{\frac{3}{2}})]J(\epsilon x)=\int_{\mathbb{R}}dy\ \mathbf{e}(y,t)J(y)$$

$$\begin{cases}\partial_t\mathbf{e}(y,t)=-C(\gamma)(-\Delta)_u^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t)\\ \mathbf{e}(y,0)=\mathbf{e}_0(y)\end{cases}$$

$$C(\gamma)=C\gamma^{-\frac{1}{2}}$$

証明のスケッチ:Wigner distribution の導入

$\mathbb{T}$ を 1 次元トーラス, $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{Z})$ のフーリエ変換を $\widehat{f}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ とかく.

$$\widehat{f}(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi\sqrt{-1}kx} f(x), \ \ k \in \mathbb{T}$$

Wigner distribution $W_\epsilon(p,k,t), (p,k,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次式で定める.

$$W_\epsilon(p,k,t) := \mathbb{E}_\epsilon[\widehat{\psi}(k - \frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^{\frac{3}{2}}})^* \widehat{\psi}(k + \frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^{\frac{3}{2}}})]$$

$$\widehat{\psi}(k,t) := \frac{1}{\sqrt{2}}[\omega(k)\widehat{q}(k,t) + \sqrt{-1}\widehat{p}(k,t)]$$

$$\omega(k) := \sqrt{2 - 2\cos 2\pi k}.$$

$\mathbb{E}_\epsilon[|\psi_x|^2] \approx \mathbb{E}_\epsilon[e_x], \epsilon \to 0$. $\sup_\epsilon \epsilon^2 \int_{\mathbb{T}} dk \mathbb{E}_\epsilon[|\widehat{\psi}(k,0)|^2]^2 < \infty$ を仮定する.

Lemma

$$\frac{2}{3} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{T}} dk \ R(k) W_\epsilon(p,k,t) = \int_{\mathbb{R}} dy \ e^{-2\pi\sqrt{-1}yp} \mathbf{e}(y,t)$$

in $\mathbb{L}^\infty([0,M] \times [0,T])$.

$$
\begin{aligned}
\partial_t W_\epsilon(p,k,t) = \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}\{-\sqrt{-1}(\omega(k+\frac{\epsilon p}{2}) - \omega(k-\frac{\epsilon p}{2})) - \gamma_0 \bar{R}(k,\epsilon p)\} W_\epsilon(p,k,t) \\
+ \frac{\gamma R(k-\frac{\epsilon p}{2})}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} Y_{\epsilon,+}(p,k,t) + \frac{\gamma R(k+\frac{\epsilon p}{2})}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} Y_{\epsilon,-}(p,k,t) \\
+ \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}} dk' R_\epsilon(p,k,k')(W_\epsilon(p,k',t) - \frac{1}{2} Y_{\epsilon,+}(p,k',t) - \frac{1}{2} Y_{\epsilon,-}(p,k',t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{\epsilon,+}(p,k,t) &:= \mathbb{E}_\epsilon[\widehat{\psi}_\epsilon(-k+\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^\delta})\widehat{\psi}_\epsilon(k+\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^\delta})] \\
Y_{\epsilon,-}(p,k,t) &:= Y_{\epsilon,+}(t)(-p,k)^* \\
R_\epsilon(p,k,k') &:= 8(\sin^2 \pi k - \sin^2 \frac{\pi p}{2})(\sin^2 \pi k' - \sin^2 \frac{\pi p}{2}) \\
&\quad \times (\sin^2 \pi(k+k') + \sin^2 \pi(k-k') - 2\sin^2 \pi p) \\
R(k) &:= 2\sin^4 \pi k + \frac{3}{2}\sin^2 2\pi k \\
\bar{R}(k,\epsilon p) &:= \frac{1}{2}[R(k+\frac{\epsilon p}{2}) + R(k-\frac{\epsilon p}{2})].
\end{aligned}
$$

長距離相関モデル

$\mathbf{S} = \mathbb{Z}, \{1, 2, \cdots, N\}, \mathbb{T}_N,\ \mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) = -2\sum_{y \in \mathbf{S}} V'_{x,z}(q_x(t) - q_z(t)) \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{x \in \mathbf{S}} \frac{1}{2}|p_x|^2 + \sum_{z \in \mathbf{S}} V_{x,z}(q_x - q_z)$$

$V_{x,z} \in C^\infty(\mathbb{R})$: 粒子 x, z 間の相互作用ポテンシャル

p_x:x 番目の粒子の運動量，q_x:x 番目の粒子の位置

$e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x|^2 + \sum_{z \in \mathbf{S}} V_{x,z}(q_x - q_z)$

長距離相関調和モデル

$\mathbf{S} = \mathbb{Z}, \{1, 2, \cdots, N\}, \mathbb{T}_N, \ \mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) = -(\alpha \star q)_x(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{x \in \mathbf{S}} \frac{1}{2} |p_x|^2 - \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbf{S}} \alpha(x - z)|q_x - q_z|^2$$

$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$: 粒子 x, y 間の相互作用の強さ，$\sum_{z \in \mathbb{Z}} \alpha(z) = 0.$

p_x:x 番目の粒子の運動量，q_x:x 番目の粒子の位置

$e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x|^2 - \frac{1}{4} \sum_{y \in \mathbf{S}} \alpha(x - z)|q_x - q_z|^2$

長距離相関確率調和モデル

$\mathbf{S} = \mathbb{Z}, \{1, 2, \cdots, N\}, \mathbb{T}_N,\ \mathbb{T}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$

$\{p_x(t), q_x(t); x \in \mathbf{S}, t \geq 0\}, \{p_x(t), q_x(t)\}_{x \in \mathbf{S}} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{\mathbf{S}}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) = p_x(t) \\ \frac{d}{dt} p_x(t) = -(\alpha \star q)_x(t) + \frac{\gamma}{2} \Delta(4p_x(t) + p(x+1, t) + p(x-1, t))dt \\ \qquad\qquad + \sqrt{\gamma} \sum_{z; |z-x| \leq 1} (Y_x p_x(t)) dw_{x+z} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{x \in \mathbf{S}} \frac{1}{2} |p_x|^2 - \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbf{S}} \alpha(x - z) |q_x - q_z|^2$$

$\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$: 粒子 x, y 間の相互作用の強さ，$\sum_{z \in \mathbb{Z}} \alpha(z) = 0.$

p_x:x 番目の粒子の運動量，q_x:x 番目の粒子の位置

$e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x|^2 - \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbf{S}} \alpha(x - z)|q_x - q_z|^2$

長距離相関確率調和モデル:ノート

- Nearest neighbor : $\alpha(0) = 2, \alpha(\pm 1) = -1, \alpha(z) = 0, z \geq 2.$
- exponential decay : $|\alpha(z)| \leq C^{-1}e^{-C|z|}, \exists C > 0$.
  α:exponential decay の時, 弱い長距離相関を持つという.
  先行研究あり. 本質的に nearest neighbor の場合と同じ結果 → $-(-\Delta)^{3/4}$.[JKO-15]
- polynomial decay : $\alpha(z) = -|z|^{-\theta}, \theta > 1.$
  α:polynomial decay の時, 強い長距離相関を持つという.

強い長距離相関確率調和モデル:モチベーション

- 物理的側面:近年の数値実験 [Lepri et.al.-17],[Bagchi-17]
  $\theta = 2$ 周辺で熱伝導率の特異な振る舞い．数学的な説明？
- 数学的側面：$\omega(k) := \sqrt{\widehat{\alpha}(k)}$, dispersion relation. $\omega'(k)$, sound speed.
  [Saito-Sasada-S-18+] による予想: $\omega'(k) \sim k^a, R(k) \sim k^b, k \to 0 \quad a, b \geq 0$ とする．$\frac{b+1}{2(b-a)} > 0 \to -(-\Delta)^{\min\{\frac{b+1}{2(b-a)},1\}}$.
  polynomial decay: $\omega'(k) \sim k^{\min\{0,\frac{\theta-3}{2}\}}$, NN,exponential decay: $\omega'(k) \sim 1$.
  $\theta < 3$ の時, $k \to 0$ で発散．$a < 0$ の時も予想は正しい？

$$\partial_t W_\epsilon(p,k,t) = \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}\{-\sqrt{-1}(\omega(k+\frac{\epsilon p}{2}) - \omega(k-\frac{\epsilon p}{2})) - \gamma_0 \bar{R}(k,\epsilon p)\} W_\epsilon(p,k,t)$$
$$+ \frac{\gamma R(k-\frac{\epsilon p}{2})}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} Y_{\epsilon,+}(p,k,t) + \frac{\gamma R(k+\frac{\epsilon p}{2})}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} Y_{\epsilon,-}(p,k,t)$$
$$+ \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}} dk' R_\epsilon(p,k,k')(W_\epsilon(p,k',t) - \frac{1}{2} Y_{\epsilon,+}(p,k',t) - \frac{1}{2} Y_{\epsilon,-}(p,k',t))$$

$$Y_{\epsilon,+}(p,k,t) := \mathbb{E}_\epsilon[\widehat{\psi}_\epsilon(-k+\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^\delta})\widehat{\psi}_\epsilon(k+\frac{\epsilon p}{2}, \frac{t}{\epsilon^\delta})]$$
$$Y_{\epsilon,-}(p,k,t) := Y_{\epsilon,+}(t)(-p,k)^*$$
$$R_\epsilon(p,k,k') := 8(\sin^2 \pi k - \sin^2 \frac{\pi p}{2})(\sin^2 \pi k' - \sin^2 \frac{\pi p}{2})$$
$$\times (\sin^2 \pi(k+k') + \sin^2 \pi(k-k') - 2\sin^2 \pi p)$$
$$R(k) := 2\sin^4 \pi k + \frac{3}{2}\sin^2 2\pi k.$$

Theorem (H-18+)

$\theta > 2$ とする.

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_\epsilon[|\psi_x(0)|^2]\delta_{\epsilon x} = \mathbf{e}_0(y)dy, \mathbf{e}_0 \in \mathbb{L}^1,$$

$$\sup_\epsilon \epsilon^2 \int_{\mathbb{T}} dk \mathbb{E}_\epsilon[|\widehat{\psi}(k,0)|^2]^2 < \infty$$

を仮定する. この時, $t \geq 0, J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_\epsilon[|\psi_x(\frac{t}{\epsilon(\theta)})|^2]J(\epsilon x) = \int_{\mathbb{R}} dy\ \mathbf{e}(y,t)J(y)$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{e}(y,t) = -C_\theta \gamma^{-\min\{\frac{\theta-1}{7-\theta},\frac{1}{2}\}}(-\Delta)_y^{\min\{\frac{3}{7-\theta},\frac{3}{4}\}}\mathbf{e}(y,t) \\ \mathbf{e}(y,0) = \mathbf{e}_0(y) \end{cases}$$

$$\epsilon(\theta) := \begin{cases} \epsilon^{\frac{6}{7-\theta}}, 2 < \theta < 3, \\ \epsilon^{\frac{3}{2}} \log \frac{1}{\epsilon}, \theta = 3, \\ \epsilon^{\frac{3}{2}}, \theta > 3. \end{cases}$$