Macdonald 過程入門

佐藤僚亮

九州大学 数理学府 修士 2 年
E-mail： ma217052@math.kyushu-u.ac.jp

平成 30 年確率論ヤングサマーセミナー
2018,8,21

話したいこと

- Macdonald 過程とは何か？
- Macdonald 過程のどういう性質が “良い” のか？

Macdonald 過程とは何か？

Macdonald 過程は，Schur 過程の一般化である：

$$\text{Schur 関数} \longrightarrow \text{Macdonald 関数}$$

$$\text{Schur 過程} \longrightarrow \text{Macdonald 過程}$$

Schur 確率測度は，

A. Okounkov, “ Infinite wedge and random partitions ”, Selecta Math **7** (2001), 57–81.

で導入され，表現論あるいは対称関数論を動機とした確率過程の研究，そしてその可積分系との関係の研究がスタートした：

表現論	確率論	可積分系

$$\text{Plancherel 確率測度} \xrightarrow[\text{ポアソン化}]{} \text{Schur 確率測度} \xrightarrow[\text{相関関数}]{} \tau \text{ 関数}$$

Schur 関数

$\mathbb{Y} := \{\emptyset\} \sqcup \bigsqcup_{n\geq 1} \mathbb{Y}_n, \quad \mathbb{Y}_n := \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$
Λ : 対称関数のなす $\mathbb{C}$-代数.

$$p_k(x) := x_1^k + x_2^k + p_3^k + \cdots, \quad p_\lambda(x) := p_{\lambda_1}(x)p_{\lambda_2}(x)\cdots$$

$$h_k(x) := \sum_{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}, \quad h_\lambda(x) := h_{\lambda_1}(x)h_{\lambda_2}(x)\cdots$$

$$m_\lambda(x) := \sum_{\alpha\in[\lambda]} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots$$

など．特に Schur 関数 $s_\lambda(x) \in \Lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Y}$) と呼ばれる対称関数の族が存在する (Macdonald).

$\mathbb{C}$-代数の準同型 (specialization) $\rho : \Lambda \to \mathbb{C}$ が Schur-nonnogetive であるとは，$s_\lambda(\rho) := \rho(s_\lambda) \geq 0$ ($\forall\lambda \in \mathbb{Y}$) が成り立つことをいう.

Schur 確率測度

2 つの Schur-nonnegative な specialization $\rho_1, \rho_2 : \Lambda \to \mathbb{C}$ に対して，$\mathbb{Y}$ 上の確率測度 M_{ρ_1,ρ_2} は次のように定義される：

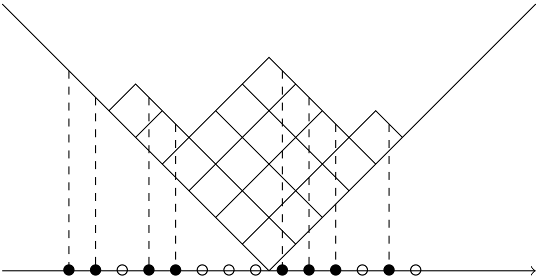
$$M_{\rho_1,\rho_2}(\lambda) := \frac{s_\lambda(\rho_1)s_\lambda(\rho_2)}{\Pi(\rho_1;\rho_2)}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}.$$

ただし $\Pi(\rho_1;\rho_2) := \sum_\lambda s_\lambda(\rho_1)s_\lambda(\rho_2)(<\infty)$ とする．この確率測度 M_{ρ_1,ρ_2} を Schur 確率測度という．

- 注 1: Thoma の定理より，Schur-nonnegative な specialization $\rho : \Lambda \to \mathbb{C}$ は,
$$\sum_{n\geq 0} h_n(\rho)u^n = e^{\gamma u}\prod_{i\geq 1}\frac{1+\beta_i u}{1-\alpha_i u}$$
により特徴付けられる．ただし $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0$, $\gamma \geq 0$ かつ $\sum_{i\geq 1}(\alpha_i + \beta_i) < \infty$.
- 注 2：Cauchy 恒等式
$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j\geq 1}\frac{1}{1-x_iy_j} = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{p_n(x)p_n(y)}{n}\right)$$
より，$\sum_i x_i, \sum_i y_i < \infty$ ならば $\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) < \infty$ を満たす．

Boson-Fermion 対応

Schur 確率測度は $\mathbb{Z}+1/2$ 上の行列式点過程を導く (Okounkov, 2001)：



$$\mathfrak{S} : \lambda \mapsto \{\lambda_i - i + 1/2\}_{i \geq 1}$$

相関核は

$$K(i,j) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \oint \oint \frac{\Pi(\rho_1; v)\Pi(\rho_2; w^{-1})}{\Pi(\rho_2; v^{-1})\Pi(\rho_1; w)} \frac{\sqrt{vw}}{v-w} \frac{dvdw}{v^{i+1}w^{-j+1}}$$

である.

歪 Schur 関数

Schur 関数の族 $(s_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Y}}$ は対称関数環 Λ の基底である．従って，

$$s_\mu(x)s_\nu(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} f^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda(x)$$

を満たす係数 $f^\lambda_{\mu,\nu}$ が存在する (Macdonald)．このとき，

$$s_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{\nu\in\mathbb{Y}} f^\lambda_{\mu,\nu} s_\nu(x)$$

と定義し，歪 Schur 関数と呼ぶ.

2 つの specialization ρ_1, ρ_2 に対して，

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} s_\lambda(\rho_1)s_{\lambda/\mu}(\rho_2) = s_\mu(\rho_1)\Pi(\rho_1;\rho_2),$$

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Y}} s_\mu(\rho_1)s_{\lambda/\mu}(\rho_2) = s_\lambda(\rho_1,\rho_2)$$

などが成り立つ (歪 Cauchy 恒等式, Macdonald).

Schur 過程 1

Schur-nonnegative な $\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+, \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-$ に対して，Young 図形の組 $(\lambda; \mu) = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)}; \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(N-1)})$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \lambda^{(1)} & & & & \lambda^{(2)} & \cdots & & \lambda^{(N)} & & \\
 & \rho_0^+ \ \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\supset$} & & \rho_1^+ \ \rotatebox{45}{$\subset$} & & & \rho_{N-1}^+ \ \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\supset$} & \\
\emptyset & & & \rho_1^- & \mu^{(1)} & & & & \mu^{(N-1)} & & \rho_N^- & \emptyset
\end{array}$$

の集合の上の確率測度 $M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)$ を

$$M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)(\lambda, \mu)$$
$$:= \frac{s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^-) s_{\lambda^{(2)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-)}{\Pi(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)}$$

と定義する．この確率測度 $M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)$ を Schur 過程という．

Schur 過程 2

ここで，$\Pi(\rho_0^+,\dots,\rho_{N-1}^+;\rho_1^-,\dots,\rho_N^-)$ は正規化定数である．

$$
\begin{aligned}
&\Pi(\rho_0^+,\dots,\rho_{N-1}^+;\rho_1^-,\dots,\rho_N^-)\\
&=\sum_{(\lambda;\mu)} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+)s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^-)s_{\lambda^{(2)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^+)\cdots s_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+)s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-)\\
&=\Pi(\rho_0^+;\rho_1^-)\sum s_{\mu^{(1)}}(\rho_0^+)s_{\lambda^{(2)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^+)\cdots s_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+)s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-)\\
&=\Pi(\rho_0^+;\rho_1^-)\sum s_{\lambda^{(2)}}(\rho_0^+,\rho_1^+)\cdots s_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+)s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-)\\
&\cdots\\
&=\prod_{0\le i<j\le N}\Pi(\rho_i^+;\rho_j^-)
\end{aligned}
$$

を得る．

なぜ Schur “過程” と呼ぶのか？

Schur 過程は,

A. Okounkov, N. Reshetikhin, “ Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram”, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603.

で導入され，もともと $(\lambda(t))_{t\in\mathbb{Z}}$ ($|t| \gg 0$ のとき $\lambda(t)=\emptyset$) 上の確率測度だった：

$$\mathrm{Prod}((\lambda(t))_{t\in\mathbb{Z}}) \propto \prod_{t\in\mathbb{Z}} \mathcal{S}_{\rho_t}(\lambda(t), \lambda(t+1)),$$

$$\mathcal{S}_\rho(\mu,\lambda) := \sum_{\nu\in\mathbb{Y}} s_{\mu/\nu}(\rho^+) s_{\lambda/\nu}(\rho^-)$$

先程の定義は，$\rho^+_{2n+1}, \rho^-_{2n} = 0$ あるいは $\rho^-_{2n+1}, \rho^+_{2n} = 0$ の場合 (0 は自明な specialization).

Macdonald 関数 1

Schur 関数を Macdonald 関数に取り替えることで，Macdonald 過程を得る．

パラメータ $q, t \in (0,1)$ を考え，Λ 上の内積を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i \geq 1} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}} \qquad \left(z_\lambda := \prod_{i \geq 1} m_i! i^{m_i} \right)$$

で定義する．ただし $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots) = 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots$ とする．

Theorem (Macdonald)

1. $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} R_{\lambda,\mu} m_\mu$,
2. $\lambda \neq \mu$ ならば $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0$

を満たす対称関数族 $P_\lambda(x; q, t) \in \mathbb{Q}[q,t] \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$ が一意に存在する．

パラメータ q, t を強調しないときは，$P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ と省略する．また $Q_\lambda(x; q, t) := P_\lambda(x; q, t) / \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t}$ とする．

Macdonald 関数 2

対称関数族 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{Y}}$ を Macdonald 関数と呼ぶ.

- $q = t$ のとき，Macdonald 関数は Schur 関数に等しい.
- $t = 0$ のとき，Macdonald 関数は q-Whitteker 関数に等しい.

  $\cdots$

注：“ n 変数の対称関数” $F \in \Lambda^{(n)}$ を対称多項式という.

$$p_k(x_1,\dots,x_n) := x_1^n + \cdots + x_n^n$$

$$h_k(x_1,\dots,x_n) := \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

など．$s_\lambda(x_1,\dots,x_n) \in \Lambda^{(n)}$ を Schur 多項式,
$P_\lambda(x_1,\dots,x_n;q,t) \in \mathbb{Q}[q,t]\otimes_{\mathbb{Q}}\Lambda^{(n)}$ を Macdonald 多項式と呼ぶ.

Macdonald 確率測度

Specialization $\rho : \mathbb{Q}[q,t] \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \to \mathbb{C}$ が Macdonald-nonnegative であるとは，$P_\lambda(\rho; q, t) \geq 0$ $(\forall \lambda \in \mathbb{Y})$ が成り立つことをいう．
2 つの Macdonald-nonnegative な specialization ρ_1, ρ_2 に対して，集合 $\mathbb{Y}$ 上の確率測度 M_{ρ_1,ρ_2} を

$$M_{\rho_1,\rho_2}(\lambda) := \frac{P_\lambda(\rho_1) Q_\lambda(\rho_2)}{\Pi(\rho_1, \rho_2)}$$

と定義する．ただし，$\Pi(\rho_1; \rho_2) := \sum_\lambda P_\lambda(\rho_1) Q_\lambda(\rho_2) (< \infty)$ とする．この確率測度 M_{ρ_1,ρ_2} を Macdonald 確率測度という．

- 注 1：非負な実数 $\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$，$\{\beta_i\}_{i\geq 1}$，γ に対して

$$\sum_{n\geq 0} Q_{(n)}(\rho) u^n = e^{\gamma u} \prod_{i\geq 1} \frac{(t\alpha_i u; q)_\infty}{(\alpha_i u; q)_\infty} (1 + \beta_i u)$$

  を満たす ρ は Macdonald-nonnegative である．ただし，$(\alpha; q) := \prod_{i\geq 0}(1 - \alpha q^i)$ とする．
- 注 2：一般に Macdonald 確率測度が行列式点過程を導くかは，わからない．

歪 Macdonald 関数

Macdonald 関数の族 $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Y}}$ は $\mathbb{Q}[q,t]\otimes_{\mathbb{Q}}\Lambda$ の基底である．
従って，

$$P_\mu(x)P_\nu(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} f_{\mu,\nu}^{\lambda}P_\lambda(x)$$

を満たす係数 $f_{\mu,\nu}^{\lambda}$ が存在する (Macdonald)．このとき

$$Q_{\lambda/\mu}(x):=\sum_{\nu\in\mathbb{Y}} f_{\mu,\nu}^{\lambda}Q_\nu(x),\quad P_{\lambda/\mu}(x):=\frac{\langle P_\lambda,P_\lambda\rangle_{q,t}}{\langle P_\mu,P_\mu\rangle_{q,t}}Q_{\lambda/\mu}(x)$$

と定義し，歪 Macdonald 関数と呼ぶ．

2 つの specialization ρ_1,ρ_2 に対して，

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} P_\lambda(\rho_1)Q_{\lambda/\mu}(\rho_2)=P_\mu(\rho_1)Z(\rho_1;\rho_2),$$

$$\sum_{\mu\in\mathbb{Y}} P_\mu(\rho_1)P_{\lambda/\mu}(\rho_2)=P_\lambda(\rho_1,\rho_2)$$

などが成り立つ (歪 Cauchy 恒等式, Macdonald).

Macdonald 過程 1

Macdonald-nonnegative な $\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+, \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-$ に対して，
Young 図形の組 $(\lambda;\mu) = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)}; \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(N-1)})$:

$$\emptyset \overset{\rho_0^+}{\subseteq} \lambda^{(1)} \overset{\rho_1^-}{\supseteq} \mu^{(1)} \overset{\rho_1^+}{\subseteq} \lambda^{(2)} \quad \cdots \quad \mu^{(N-1)} \overset{\rho_{N-1}^+}{\subseteq} \lambda^{(N)} \overset{\rho_N^-}{\supseteq} \emptyset$$

の集合の上の確率測度 $M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)$ を

$$M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)(\lambda, \mu)$$
$$:= \frac{P_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) Q_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^-) P_{\lambda^{(2)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^+) \cdots P_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+) Q_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-)}{\Pi(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)}$$

と定義する． この確率測度 $M(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)$ を
Macdonald 過程という．

Macdonald 過程 2

ここで，$\Pi(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-)$ は正規化定数である．

Schur 過程の場合と同様に，

$$\Pi(\rho_0^+, \ldots, \rho_{N-1}^+; \rho_1^-, \ldots, \rho_N^-) = \prod_{1 \le i < j \le N} \Pi(\rho_i^+; \rho_j^-)$$

を得る．

ascending Macdonald 過程 1

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{i-1}) \in \mathbb{Y}_{i-1},\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i) \in \mathbb{Y}_i$ に対して,
$\mu \prec \lambda$ は $\lambda_1 \le \mu_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \mu_{i-1} \le \lambda_i$ を意味する.

非負の実数 $a_1, \ldots, a_N$ と Macdonald-nonnegative な ρ に対して,
Young 図形の組

$$\emptyset \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \cdots \prec \lambda^{(N)} \quad (\lambda^{(i)} \in \mathbb{Y}_i)$$

の集合 (Gelfand–Tsetlin patterns) の上の確率測度
$M_{asc}(a_1, \ldots, a_N; \rho)$ を

$$M_{asc}(a_1, \ldots, a_N; \rho)(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)}) := \frac{P_{\lambda^{(1)}}(a_1) P_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(a_2) \cdots P_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(a_N) Q_{\lambda^{(N)}}(\rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho)}$$

で定義する. この確率測度 $M_{asc}(a_1, \ldots, a_N; \rho)$ を ascending Macdonald 過程と呼ぶ.

ascending Macdonald 過程 2

ただし $\Pi(a_1, \dots, a_N; \rho)$ は正規化定数であり,

$$\Pi(a_1, \dots, a_N; \rho) = \prod_{i=1}^{N} \Pi(a_i; \rho), \quad \Pi(u; \rho) = e^{\gamma u} \prod_{i \geq 1} \frac{(t\alpha_i u; q)_\infty}{(\alpha_i u; q)_\infty} (1+\beta_i u)$$

が成り立つ.

さらに，ascending Macdonald 過程は Macdonald 過程の特別な場合である．実際，非負の実数 $a \geq 0$ に対して，$\mu \prec \lambda$ でないとき $P_{\lambda/\mu}(a) = 0$ であるから，ascending Macdonald 過程は,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \lambda^{(1)} & & & & \lambda^{(2)} & \cdots & & \lambda^{(N)} & & \\ & {}^{a_1}\!\nearrow & & \searrow^{0} & & {}^{a_2}\!\nearrow & & & {}^{a_N}\!\nearrow & & \searrow^{\rho} & \\ \emptyset & & & & \mu^{(1)} & & & & \mu^{(N-1)} & & & \emptyset \end{array}$$

$$\emptyset \overset{a_1}{\subseteq} \lambda^{(1)} \overset{0}{\supseteq} \mu^{(1)} \overset{a_2}{\subseteq} \lambda^{(2)} \cdots \mu^{(N-1)} \overset{a_N}{\subseteq} \lambda^{(N)} \overset{\rho}{\supseteq} \emptyset$$

の場合に他ならない．(0 は自明な specialization)

Macdonald 作用素

多項式 $F(x_1,\dots,x_n)$ に対して,

$$[T_{u,x_i}F](x_1,\dots,x_n) := F(x_1,\dots,x_{i-1},ux_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

と定義する．さらに $r=1,\dots,n$ に対して

$$D_n^r := \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=r}} t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i}$$

と定義し，Macdonald 作用素と呼ぶ.
このとき $\lambda\in\mathbb{Y}_n$ に対して,

$$[D_n^r P_\lambda](x_1,\dots,x_n) = e_r(q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2},\dots,q^{\lambda_n})P_\lambda(x_1,\dots,x_n)$$

が成り立つ (Macdonald)．ただし

$$e_r(u_1,\dots,u_n) := \sum_{i_1<\cdots<i_r} u_{i_1}\cdots u_{i_r}$$

である.

期待値 1

$r = 1, \ldots, N$ に対して，確率変数

$$X_1 \colon (\mathbb{Y}, M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}) \ni \lambda \mapsto e_r(q^{\lambda_1} t^{n-1}, q^{\lambda_2} t^{n-2}, \ldots, q^{\lambda_n})$$

の期待値は,

$$\begin{aligned}
\langle X_1 \rangle_{M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}} &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} e_r(q^{\lambda_1} t^{n-1}, q^{\lambda_2} t^{n-2}, \ldots, q^{\lambda_n}) M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}(\lambda) \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} \frac{[D_N^r P_\lambda](a_1, \ldots, a_N) Q_\lambda(\rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho)} \\
&= \frac{[D_N^r \Pi](a_1, \ldots, a_N; \rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N)}
\end{aligned}$$

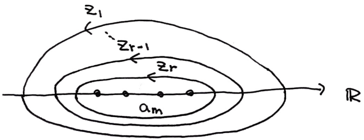
と計算できる.

積分表示 1

さらに

$$\frac{[D_N^r \Pi](a_1, \ldots, a_N; \rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N)} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^r r!} \oint \cdots \oint \det \left[\frac{1}{tz_k - z_l} \right]_{k,l=1}^{r} \prod_{j=1}^{r} \left(\prod_{m=1}^{N} \frac{tz_j - a_m}{z_j - a_m} \right) \frac{\Pi(qz_j; \rho)}{\Pi(z_j; \rho)} dz_j$$

と計算できる．ただし積分路は



である (Borodin–Corwin, 2014).

期待値 2

$k \geq 1$ に対して，確率変数

$$X_2\colon (\mathbb{Y}, M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}) \ni \lambda \mapsto e_1(q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2}, \ldots, q^{\lambda_n})^k$$

の期待値は,

$$\begin{aligned}
\langle X_2 \rangle_{M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}} &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} e_1(q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2}, \ldots, q^{\lambda_n})^k M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}(\lambda) \\
&= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} \frac{[(D_N^1)^k P_\lambda](a_1,\ldots,a_N) Q_\lambda(\rho)}{\Pi(a_1,\ldots,a_N;\rho)} \\
&= \frac{[(D_N^1)^k \Pi](a_1,\ldots,a_N;\rho)}{\Pi(a_1,\ldots,a_N)}
\end{aligned}$$

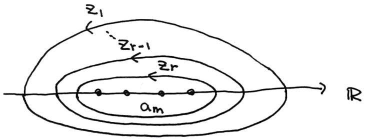
と計算できる.

積分表示 2

さらに

$$
\begin{aligned}
&\frac{[(D_N^1)^k\Pi](a_1,\dots,a_N;\rho)}{\Pi(a_1,\dots,a_N)} \\
&= \frac{(t-1)^{-k}}{(2\pi\sqrt{-1})^k}\oint\cdots\oint \prod_{1\le a<b\le k}\frac{(tz_a-qz_b)(z_a-z_b)}{(z_a-qz_b)(tz_a-z_b)} \\
&\qquad\qquad \prod_{c=1}^{k}\left(\prod_{m=1}^{N}\frac{tz_c-a_m}{z_c-a_m}\right)\frac{\Pi(qz_c;\rho)}{\Pi(z_c;\rho)}\frac{dz_c}{z_c}
\end{aligned}
$$

と計算できる．ただし積分路は



である (Borodin–Corwin, 2014).

q-Whittaker 過程

$$\text{ascending Macdonald 過程} \xrightarrow[t \to 0]{} q\text{-Whittaker 過程}$$

非負の実数 $a_1, \ldots, a_N$ と Macdonald-nonnegative な ρ に対して集合 $\mathbb{Y}$ 上の確率測度 $M_{t=0}(a_1, \ldots, a_N; \rho)$ を

$$M_{t=0}(a_1, \ldots, a_N; \rho)(\lambda) := \frac{P_\lambda(a_1, \ldots, a_N; q, 0) Q_\lambda(\rho; q, 0)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho)},$$

で定義し，q-Whittaker 確率測度と呼ぶ．ただし，

$$\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho) := \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} P_\lambda(a_1, \ldots, a_N; q, 0) Q_\lambda(\rho; q, 0).$$

q 解析の記号

- $(a;q)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$
- $(a;q)_\infty := (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots$
- $[n]_q := (1-q^n)/(1-q), \quad [n]_q! := (q;q)_n/(1-q)^n$
- q-二項定理：
$$\sum_{k\geq 0} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$
- q-指数関数：
$$e_q(x) := \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{[k]_q!} = \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty}$$
- q-Laplace 変換：$f \in \ell^1(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対して
$$\widehat{f}^q(z) := \sum_{n\geq 0} \frac{f(n)}{(zq^n;q)_\infty}$$

期待値 1'

$r = 1, \ldots, N$ に対して，確率変数

$$X_1' \colon (\mathbb{Y}, M_{t=0}(a_1, \ldots, a_N; \rho)) \ni \lambda \mapsto q^{\lambda_N + \lambda_{N-1} + \cdots + \lambda_{N-r+1}}$$

の期待値は

$$\begin{aligned}
&\langle X_1' \rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)} \\
&= \lim_{t\to 0} \langle t^{-r(r-1)/2} e_r(q^{\lambda_1} t^{N-1}, q^{\lambda_2} t^{N-2}, \ldots, q^{\lambda_N}) \rangle_{M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}} \\
&= \lim_{t\to 0} t^{-r(r-1)/2} \frac{[D_N^r \Pi](a_1, \ldots, a_N; \rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho)}
\end{aligned}$$

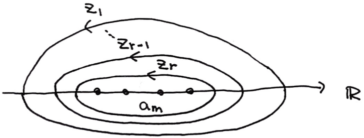
と計算できる．

積分表示 1'

さらに

$$\langle X_1' \rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)} = \frac{(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}}{(2\pi\sqrt{-1})^r r!} \oint \cdots \oint \frac{dz_1}{z_1^r} \cdots \frac{dz_r}{z_r^r} \prod_{1\le k<l\le r} (z_k - z_l)^2 \prod_{j=1}^{r} \left(\prod_{m=1}^{N} \frac{a_m}{a_m - z_j} \right) \frac{\Pi(qz_j;\rho)}{\Pi(z_j;\rho)}$$

と計算できる．ただし積分路は



である．

期待値 2'

$k \geq 1$ に対して，確率変数

$$X_2' \colon (\mathbb{Y}, M_{t=0}(a_1, \ldots, a_N; \rho)) \ni \lambda \mapsto q^{k\lambda_N}$$

の期待値は

$$\begin{aligned}
&\langle X_2' \rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)} \\
&= \lim_{t\to 0} \langle e_1(q^{\lambda_1} t^{N-1}, q^{\lambda_2} t^{N-2}, \ldots, q^{\lambda_N})^k \rangle_{M_{(a_1,\ldots,a_N),\rho}} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{[(D_N^1)^k \Pi](a_1, \ldots, a_N; \rho)}{\Pi(a_1, \ldots, a_N; \rho)}
\end{aligned}$$

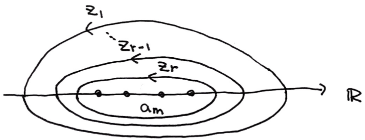
と計算できる．

積分表示 2'

さらに

$$\langle X_2' \rangle_{M_{t=0}(a_1,\dots,a_N;\rho)} = \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(2\pi\sqrt{-1})^k} \oint \cdots \oint \prod_{1\le a<b\le k} \frac{z_a - z_b}{z_a - qz_b} \prod_{j=1}^{k} \left(\prod_{m=1}^{N} \frac{a_m}{a_m - z_j} \right) \frac{\Pi(qz_j;\rho)}{\Pi(z_j;\rho)} \frac{dz_j}{z_j}$$

と計算できる．ただし積分路は



である．

積分表示 2"

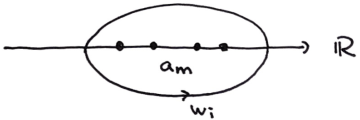
さらに積分路を固定できる：

$$\langle X_2' \rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)} = [k]_q!(1-q)^k \sum_{L\geq 0} \frac{1}{L!} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_L\geq 1 \\ n_1+\cdots+n_L=k}} \oint \cdots \oint \frac{dw_1 \cdots dw_L}{(2\pi\sqrt{-1})^L} \det\left[\frac{f(w_i)f(qw_i)\cdots f(q^{n_i-1}w_i)}{q^{n_i}w_i - w_j}\right]_{i,j=1}^{L}.$$

ここで

$$f(z) := \left(\prod_{m=1}^{N} \frac{a_m}{a_m - z}\right) \frac{\Pi(qz;\rho)}{\Pi(z;\rho)}$$

であり，積分路は



である．

分布の q-Laplace 変換 1

$\mathbb{P}(\lambda_N = k) = \sum_{\lambda:\lambda_N=k} M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)(\lambda)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}^q}(\xi) &= \sum_{k\geq 0} \frac{\mathbb{P}(\lambda_N = k)}{(q^k\xi;q)_\infty} \\
&= \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} \frac{1}{(q^{\lambda_N}\xi;q)_\infty} M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho) \\
&= \left\langle \frac{1}{(q^{\lambda_N}\xi;q)_\infty} \right\rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)}.
\end{aligned}$$

さらに q-二項定理より

$$\widehat{\mathbb{P}^q}(\xi) = \sum_{k\geq 0} \frac{\xi^k}{[k]_q!(1-q)^k} \langle q^{k\lambda_N}\rangle_{M_{t=0}(a_1,\ldots,a_N;\rho)}$$

を得る．

分布の q-Laplace 変換 2

積分表示 2'' より,

$$\widehat{\mathbb{P}^q}(\xi) = \sum_{k\ge 0}\xi^k \sum_{L\ge 0}\frac{1}{L!}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_L\ge 1\\ n_1+\cdots+n_L=k}} \oint\cdots\oint \frac{dw_1\cdots dw_L}{(2\pi\sqrt{-1})^L} \det\left[\frac{f(w_i)f(qw_i)\cdots f(q^{n_i-1}w_i)}{q^{n_i}w_i - w_j}\right]_{i,j=1}^{L}$$

$$= \sum_{L\ge 0}\frac{1}{L!}\sum_{n_1,\dots,n_L\ge 1} \oint\cdots\oint \frac{dw_1\cdots dw_L}{(2\pi\sqrt{-1})^L} \det\left[\xi^{n_i}\frac{f(w_i)f(qw_i)\cdots f(q^{n_i-1}w_i)}{q^{n_i}w_i - w_j}\right]_{i,j=1}^{L}$$

を得る (Fredholm 行列式).

コメント 1

- Macdonald 過程は Macdonald 確率測度の一般化であり，それぞれ Schur 過程，Schur 確率測度の一般化である．
- Schur 確率測度は行列式点過程を導くが (Boson-Fermion 対応)，Macdonald 確率測度一般で行列式点過程を導くかはわからない．
- Cauchy 恒等式や歪 Cauchy 恒等式を用いて，正規化定数 ($\Pi(\cdots)$) を具体的に計算することができる．
- Macdonald 作用素とその積分表示を用いて，$e_r(q^{\lambda_1}t^{n-1}, q^{\lambda_2}t^{n-2}, \dots, q^{\lambda_n})$ などの期待値を具体的に計算 (積分表示) することができる．

コメント 2

- q-Whittaker 過程の場合，$q^{\lambda_N+\lambda_{N-1}+\cdots+\lambda_{N-r+1}}$ や $q^{k\lambda_N}$ などの期待値を具体的に計算 (積分表示) することができる.
- さらに q-Whittaker 過程の場合，λ_N の分布の q-Laplace 変換も具体的に計算 (積分表示) でき，Fredholm 行列式で書かれる.

また今回触れていないこととして：

- ascending Macdonald 過程上の Markov 過程 $(\lambda^{(k)}(s))_k$ というものを考えることができ，
- さらに $t \to 0$ のとき $\{\lambda_k^{(k)}(s)\}_k$ から q-TASEP を得る.

参考文献

- A. Okounkov, " Infinite wedge and random partitions ", Selecta Math **7** (2001), 57–81.
- A. Okounkov, N. Reshetikhin, " Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram", J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603.
- A. Borodin, I. Corwin, "Macdonald processes", Prob. Theory Relat. Fields **158** (2014), 225–400.