

# シェルピンスキーガスケット上に構成した 自己回避ウォーク

大塚 隆史

数理情報科学専攻 首都大学東京

ヤングサマーセミナー 愛知県休暇村伊良湖

- ① イン트로ダクション
- ② 設定と準備
- ③ サンプルパスの性質
- ④ 3段ガスケット上の自己回避ウォーク

1 イン트로ダクション

2 設定と準備

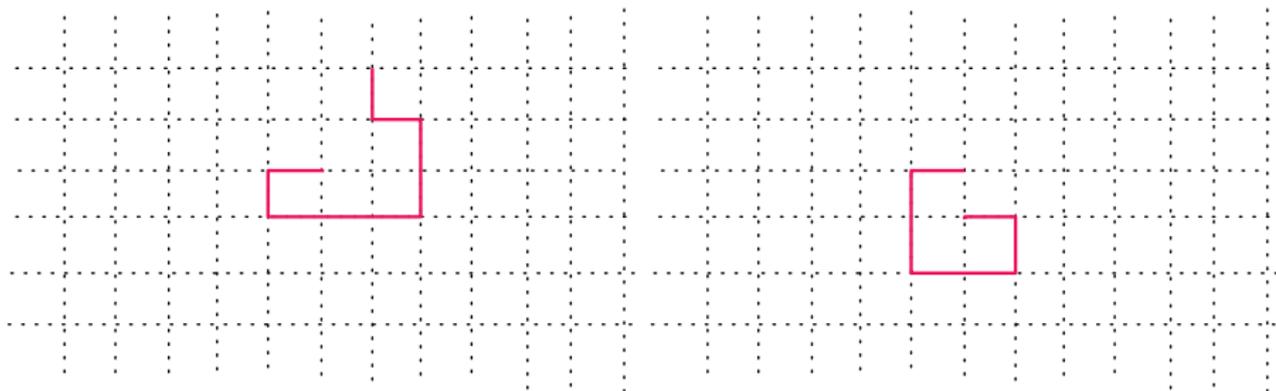
3 サンプルパスの性質

4 3段ガスケット上の自己回避ウォーク

マルコフ性をもたないとは、簡単に言えば、ランダムウォークの振る舞いが、現在の状況だけでなく過去の挙動にも依存してしまうことをいう。一般には、マルコフ性をもたないときにその解析は困難であるが、シェルピンスキーガasketとよばれるフラクタル、およびその類似の空間においては興味深い結果が得られることがわかっている。

自分自身の軌跡と交わることを禁止したランダムウォークを  
Self-avoiding walk という。

出発点以降すべての経路を覚えていないといけないという意味で、マルコフ性から最も遠い典型例である。







次元	変位の指数	連続極限
$d = 1$	$\mu = 1$	自明 (等速直線運動)
$d = 2$	$\mu = 3/4$	$SLE_{8/3}$
$d = 3$	$\mu = 0.5876 \dots$	?
$d = 4$	$\mu = 1/2 + (\text{補正項})$	BM
$d \geq 5$	$\mu = 1/2$	BM(Hara, Slade)

Self-avoiding walk は低次元空間において Simple random walk と大きく異なる挙動を示す.

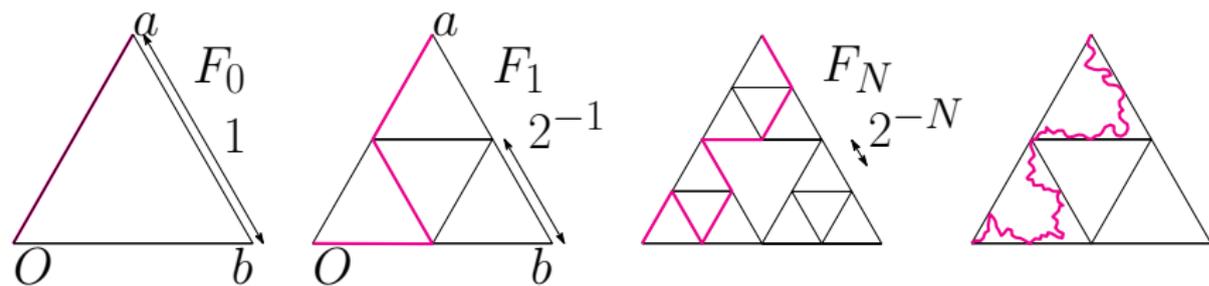
① イン트로ダクション

② 設定と準備

③ サンプルパスの性質

④ 3段ガスケット上の自己回避ウォーク

# シェルピンスキーガスケットと、その近似グラフ



$V_0 = \{O, a, b\}$ ,  $E_0 = \{(O, a), (O, b), (a, b)\}$ ,  $F_0 = G(V_0, E_0)$  とおく.  
 $N \geq 1$  に対して、各辺の中点を結んでできた、一辺の長さ  $2^{-N}$  のグラフを、

$$F_N = G(V_N, E_N)$$

と書く. ただし,  $V_N, E_N$  はそれぞれ  $F_N$  の頂点全体, 辺全体を表す.  
 $V_* = \bigcup_{N \geq 0} V_N$  とおくととき,  $F = \overline{V_*}$  をシェルピンスキーガスケットとよぶ.  
 ただし,  $\overline{V_*}$  は,  $V_*$  の閉包を表す.

Q.  $F_N$  上の,  $O$  から  $a$  への自己回避ウォーク  $X_N$  に対して,  $N \rightarrow \infty$  (辺の長さ  $2^{-N} \rightarrow 0$ ) としたとき極限は存在するか? 存在するなら, その性質は?

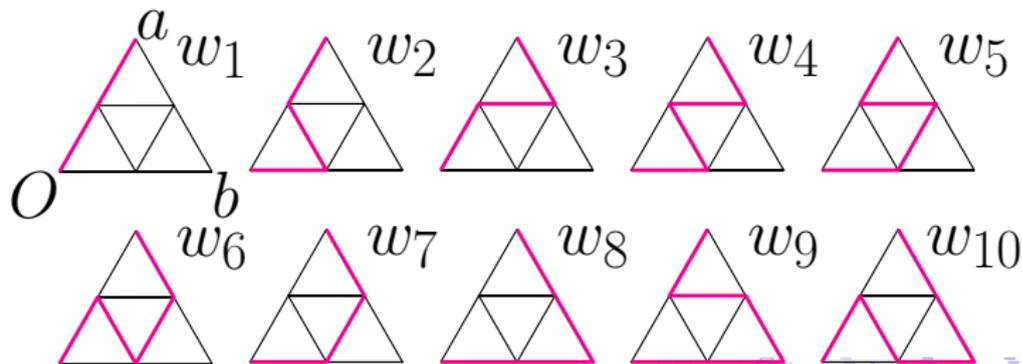
## $F_N$ 上の自己回避パス

$w = (w(0), \dots, w(n)), n \in \mathbb{N}$  が  $F_N$  上の自己回避パスであるとは,  
 $w(0) = O, w(i) \in V_N, (w(i), w(i+1)) \in E_N, w(i) \neq w(j) (i \neq j),$   
 $w(n) = a,$

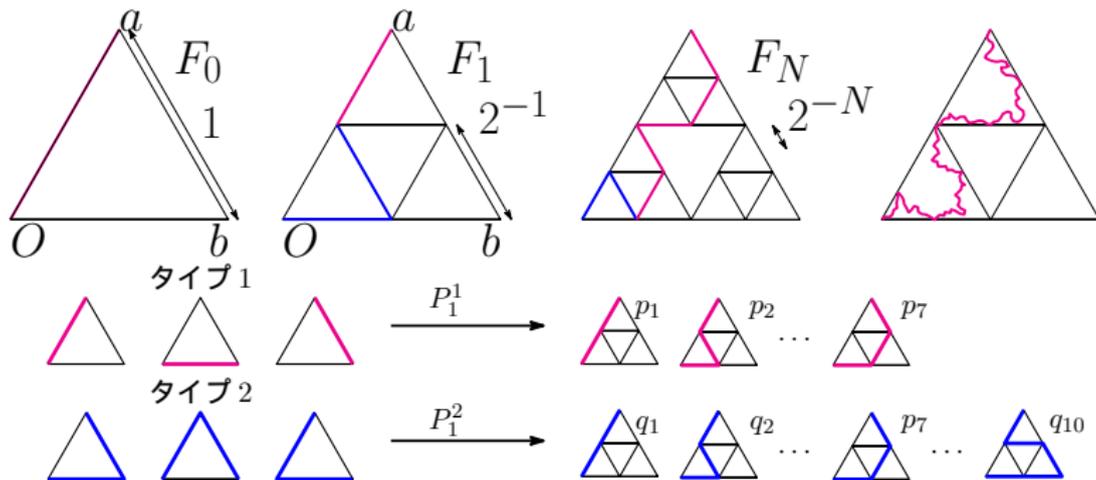
を満たすときにいう.  $w$  の長さ  $\ell$  を  $\ell(w) = n$  と定める. このとき,

$$w(t) = \begin{cases} (i+1-t)w(t) + (t-i)w(i+1), & i \leq t < i+1, \\ a, & i = 0, \dots, \ell(w) - 1, \\ a, & t \geq \ell(w). \end{cases}$$

とすると,  $w$  は単純曲線となる.  $F_1$  上の自己回避パスは次の 10 通り.



# 自己回避ウォークの構成について



- $w_N$  を各三角形ごとに区切った部分パスを,  $w_N$  の切片とよぶ.
- 三角形のタイプを, 切片が 1 歩のとき 1, 切片が 2 歩のとき 2 と定義.

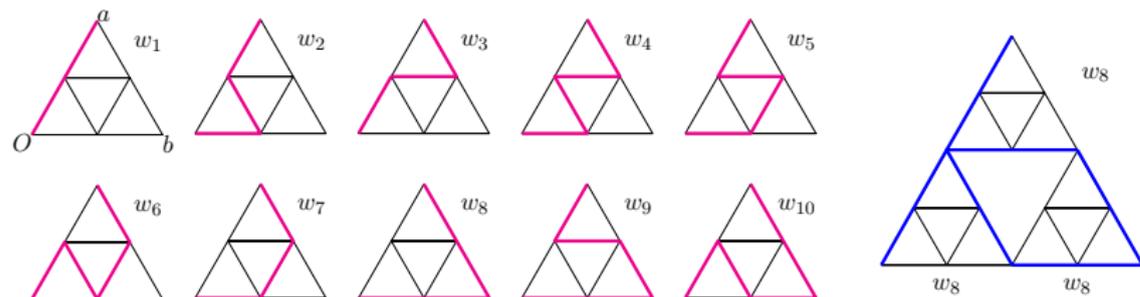
の各切片が “細かい構造” ( $F_1$  上の自己回避パスを  $2^{-N}$  倍に縮小したものに枝分かれしたものが  $w_{N+1}$  である, ととらえる. 次で, 枝分かれの仕方が従う分布  $P_1^1, P_1^2$  を定義する.

# $F_1$ 上の自己回避ウォークとパラメータ

$p_i, q_i \geq 0, \sum_{i=1}^{10} p_i = \sum_{i=1}^{10} q_i = 1, p_8 = p_9 = p_{10} = 0$ , が与えられたとき,

$$P_1^1[w_i] = p_i, \quad P_1^2[w_i] = q_i$$

のように確率を定義する. (タイプ1に  $p_i$ , タイプ2に  $q_i$  が対応.)



$p_8 = p_9 = p_{10} = 0$  としたのは, 自己回避的 (単純曲線) でないパスに枝

分かれしたものに正の確率を与えることを避けるため.

$p_i, q_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) を “パラメータ” とみなす.

## “パラメータ” の例

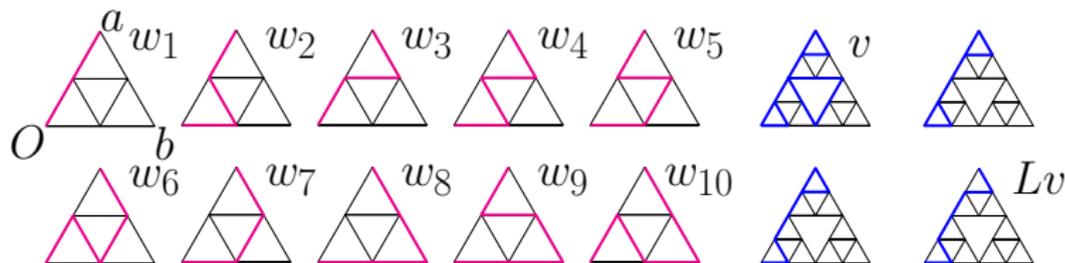
例えば,  $p_i, q_i$  ( $= P_1^1[w_i], P_1^2[w_i]$ ) に

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = p_3 = p_7 = \frac{2}{15}, p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{30}, p_8 = p_9 = p_{10} = 0,$$

$$q_1 = \frac{1}{9}, q_2 = q_3 = q_7 = \frac{11}{90}, q_4 = q_5 = q_6 = \frac{2}{45}, q_7 = \frac{8}{45}, q_8 = \frac{2}{9},$$

$$q_9 = q_{10} = \frac{1}{18}.$$

を代入すると, **ループ・イレースドウォーク** (シンプルランダムウォークからサイズの大きい順にループを消去して得られたランダム・ウォーク) [Hattori, Mizuno 14'], [Shinoda, Teufl, Wagner 14'] に相当する.

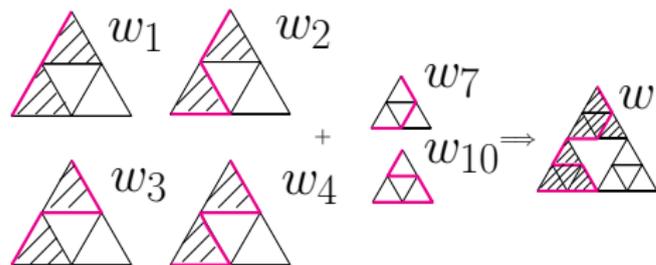


## 確率測度 $P_N^r$ ( $N \geq 2$ )

$F_N$  上の  $O \rightarrow a$  の自己回避パス  $w$  に対して, その確率を

$$P_N^r[w] = \sum_{w'} P_{N-1}^r[w'] \prod_{j=1}^k P_1^{r(j,w')}[w^j],$$

と定める. ただし, 上式の和は  $F_{N-1}$  上の ( $w$  より, ひとつ “粗い”) 自己回避パスで, 通過する一辺  $2^{-N+1}$  の三角形が  $w$  と等しいものにわたってとり,  $r(j, w')$  は  $w'$  によって定まる三角形のタイプ,  $w^j$  は  $w$  の  $j$  個目の切片 (細かい構造) に対応した  $F_1$  上の自己回避パスとする.



$$P_2^1[w] = p_1 p_{10} p_7 + p_2 q_{10} p_7 + p_3 p_{10} q_7 + p_4 q_{10} q_7$$

## 歩数の分布と優臨界分枝過程

枝分かれによって“生まれる”三角形の個数の“平均”を  $\lambda$  とおくと、

$$2 \leq \lambda \leq 3$$

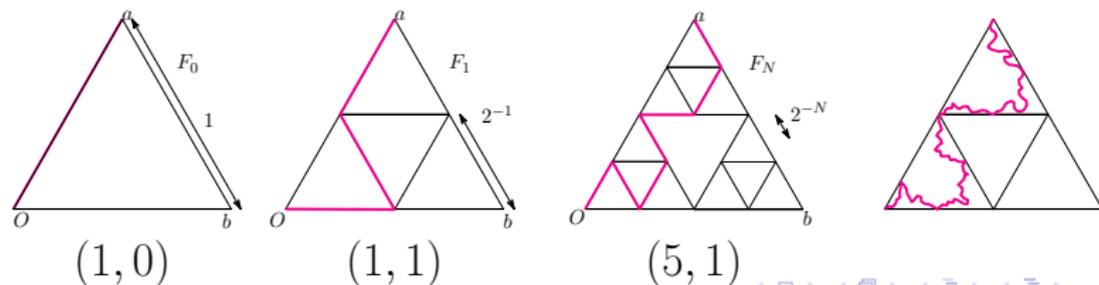
が成り立つ。よって、 $F_N$  上の自己回避パス  $w$  に対して、

$$S^{N,r}(w) = \#\{w \text{ が通過する一辺 } 2^{-N} \text{ のタイプ } r \text{ の三角形}\}$$

とおけば、

$$\{(S^{N,1}(w), S^{N,2}(w))\}_{N=0}^{\infty}$$

は 2 タイプの優臨界分枝過程となる。またこのとき、 $S^{N,1}(w) + 2S^{N,2}(w)$  は  $w_N$  の全体の歩数を表す。分枝過程の極限定理から、 $N \rightarrow \infty$  のときの歩数の分布の評価を得る。



# 連続極限

- $\lambda$ : 枝分かれによって“生まれる”三角形の個数の“平均” ( $2 \leq \lambda \leq 3$ ).
- タイプ1の三角形, タイプ2の三角形ともに, 一つ以上“生まれる”確率が正であることを仮定する (irreducible, positive regular).

このとき,  $F_N$  上の自己回避ウォーク  $X_N(t) = w_N(t)$  に対して次が成り立つ. このとき, 次の定理が成り立つ.

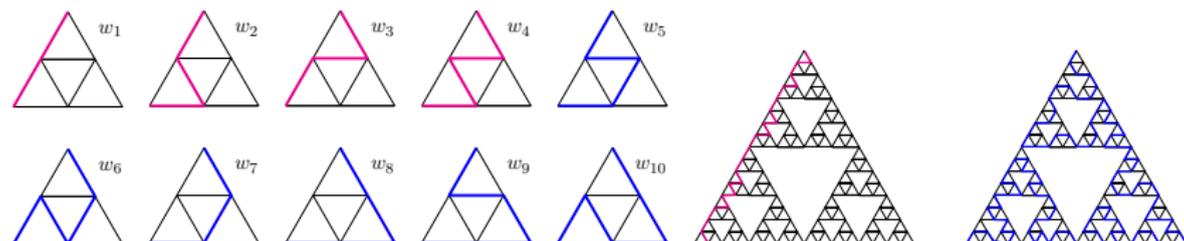
## Theorem (連続極限)

ある  $F$  上の連続な確率過程  $X$  が存在して,  $t > 0$  について一様に

$$X_N(\lambda^N t) \rightarrow X(t) \quad a.s. \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

- ① イン트로ダクション
- ② 設定と準備
- ③ サンプルパスの性質
- ④ 3段ガスケット上の自己回避ウォーク

# (1):二つの極端な場合



- $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$  ならば, 確率 1 で  $\{X(t) \mid t \in [0, \infty)\}$  は線分  $Oa$ .
- $p_5 + p_6 + p_7 = q_5 + \dots + q_{10} = 1$  ならば, 確率 1 で,  $\{X(t) \mid t \in [0, \infty)\}$  は SG 全体を埋め尽くす, ペアノ曲線.

$X_N$  は自己回避的だが, 極限  $X$  は自己回避的とは限らない. 自己回避的とならないのは, 空間全体を埋め尽くす, 自明な (deterministic な) 場合のみか? → NO!!

## (2): (非自明な) 自己回避過程

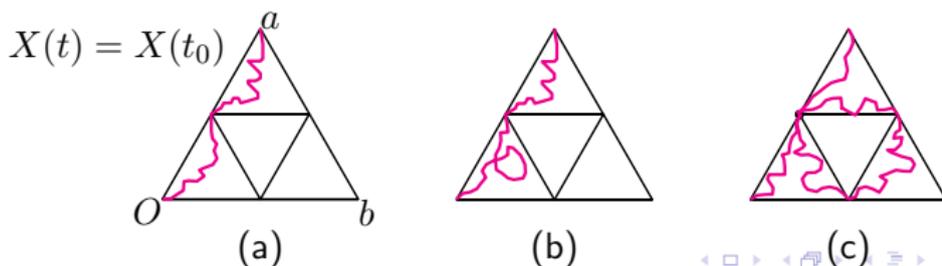
### Theorem (自己回避性)

(i)  $p_5 + p_6 + p_7 < 1$ , または (ii)  $p_7 = 0, q_5 + q_6 + q_7 + q_8 = 0$ , が成り立つならば,  $X$  は確率 1 で自己回避的.

証明の流れ: 自己交差が起きる場合は次の 3 通り:

- (a) 一点に一定時間とどまる.
- (b)  $F \setminus V_m$  で交差する.
- (c)  $V_m$  上で (異なる方向から近づいて) 交差する.

それぞれの事象が起こる確率がいずれも 0 であることを示して, 定理を証明する. 定理の中の条件 (i), (ii) は (c) の場合の証明に用いる.



### (3):自己交差を持つ場合

#### Theorem

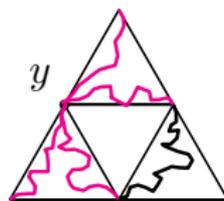
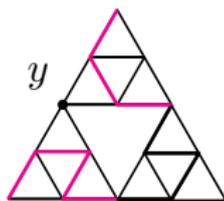
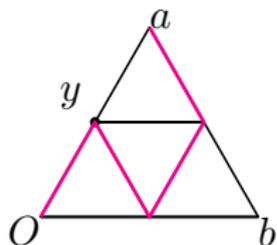
(i)  $p_5 + p_6 + p_7 = 1$ , かつ  $p_7 + q_7 + q_8 > 0$ ,

(ii)  $p_5 + p_6 + p_7 = 1$ , かつ  $q_5 + q_6 + q_7 > 0$ .

(i) または (ii) が成り立つとする. このとき, 連続極限  $X$  は確率 1 で, 自己交差をもつ.

(注: 自己回避的となるための条件は, (i)  $p_5 + p_6 + p_7 < 1$ , または (ii)  $p_7 = 0, q_5 + q_6 + q_7 + q_8 = 0$  であった.)

例: (ii) とする. もし, 最初の枝分かれが  $w_6 \rightarrow (w_5, w_6, w_7) \rightarrow \dots$  のようであったら, 続くすべての枝分かれは  $P_1^1$  に従うため, 極限  $X$  は  $y$  の異なる両端から  $y$  へ到達する.



# 漸近挙動

## Theorem (短時間挙動)

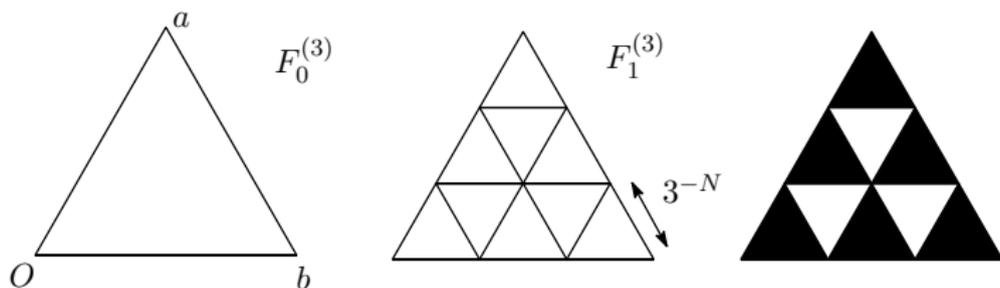
$\gamma = \log 2 / \log \lambda$  とする. このとき,  $0 < p_1 + \cdots + p_4, q_1 + \cdots + q_4 < 1$  ならば, 正定数  $C_1 = C_1(\vec{p}, \vec{q}), C_2 = C_2(\vec{p}, \vec{q}) > 0$  が存在して, 任意の  $s > 0$  に対して

$$C_1 \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{E[|X(t)|^s]}{t^{\gamma s}} \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{E[|X(t)|^s]}{t^{\gamma s}} \leq C_2.$$

注: 条件  $0 < p_1 + \cdots + p_4, q_1 + \cdots + q_4 < 1$  は, 指数型のタウバー型定理を適用する際に用いる.

- ① イン트로ダクション
- ② 設定と準備
- ③ サンプルパスの性質
- ④ 3段ガasket上の自己回避ウォーク

### 3段シェルピンスキーガスケット



$F_1^{(3)}$  上の自己回避パスは 108 本.

$\sum p_i = \sum q_i = 1$  を満たす  $p_i, q_i \geq 0, i = 1, \dots, 108$  によって  $F_1^{(3)}$  上の確率測度を構成.

$$P_1^1[w_i] = p_i, \quad P_1^2[w_i] = q_i$$

のように確率を定義する. (タイプ 1 に  $p_i$ , タイプ 2 に  $q_i$  が対応.)

$$P_N^r[w] = \sum_{w'} P_{N-1}^r[w'] \prod_{j=1}^k P_1^{r(j,w')} [w^j],$$

# まとめ

SG 上でパラメータ付きの自己回避ウォークの族を構成することができる.

## 参考文献

- [1] Hattori, K., Mizuno, M. : *Loop-erased random walk on the Sierpinski gasket*, Stoch. Proc. Applic, **124**, (2014) 566–585.
- [2] Hattori, K., Ogo, N., Otsuka, T. : *A family of self-avoiding random walks interpolating the loop-erased random walk and a self-avoiding walk on the Sierpinski gasket*, Discrete Contin. Dyn. Syst. S, **10**, (2017) 289–312.
- [3] Shinoda, M., Teufl, E., Wagner, S. : *Uniform spanning trees on Sierpinski graphs*, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, **11**, (2014) 737780.