SLE とコード型
小松・Loewner（レヴナー）方程式

村山 拓也

京都大学　理学研究科

2018/08/22　@休暇村伊良湖，確率論ヤングサマーセミナー

Plan of the talk

1. SLE(確率的 Loewner 発展) についてのレビュー
   - SLE の定義
   - 局所性，ガウス自由場との関係
2. 小松・Loewner 方程式
   - 単純曲線に対するコード型小松・Loewner 方程式
   - 連続な hull に対する小松・Loewner 方程式（講演者の結果）

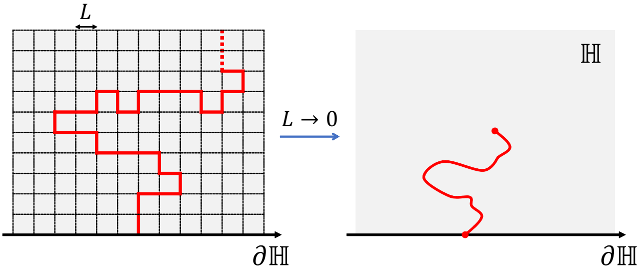
1. SLE(確率的 Loewner 発展) についてのレビュー
   - SLE の定義
   - 局所性，ガウス自由場との関係
2. 小松・Loewner 方程式
   - 単純曲線に対するコード型小松・Loewner 方程式
   - 連続な hull に対する小松・Loewner 方程式（講演者の結果）

Intro: 統計物理模型とスケーリング極限

例

- ループ除去ランダムウォーク (loop erased random walk)
- 一様全域木 (uniform spanning tree)
- パーコレーション (percolation)
- Ising 模型，Potts 模型，etc.

これら統計物理的なランダム模型たちはスケーリング極限を持つことが証明もしくは予想されている．(cf. RW $\to$ BM)

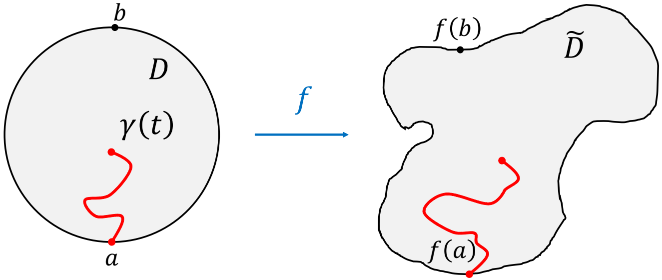


共形不変性，領域 Markov 性

2 次元ではスケーリング極限 $\gamma(t)$ に次の 2 性質が期待される：

- 共形不変性 (conformal invariance)
  単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上で $a \in \partial D$ から $b \in \partial D$ に向かうスケーリング極限の分布を $\mu_{D,a,b}$ と書くとき，等角写像 $f : D \to \tilde{D}$ があれば

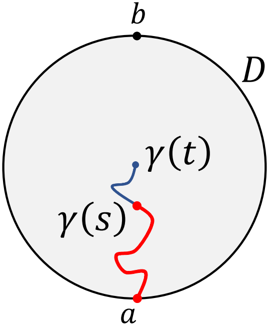
$$\mu_{\tilde{D},f(a),f(b)} = f \circ \mu_{D,a,b}.$$



共形不変性，領域 Markov 性

- 領域 Markov 性 (domain Markov property)
  $\gamma(0,s]$ で条件付けされた $\gamma(s,t]$ の分布は $D\setminus\gamma(0,s]$ のみに依存し，$\gamma(0,s]$ のその他の情報には依存しない．i.e.

$$\mu_{D,a,b}(\,\cdot\,|\gamma(0,s]) = \mu_{D\setminus\gamma(0,s],\gamma(s),b}, \quad \mu_{D,a,b}\text{-a.s.}$$



共形不変性，領域 Markov 性

- スケーリング極限の共形不変性，領域 Markov 性はこのままでは扱いづらい．
- しかし，複素函数論でよく知られた Loewner の方法を経由すれば，駆動函数と呼ばれる実数値過程 $\xi(t)$ の定常独立増分性に帰着できる．

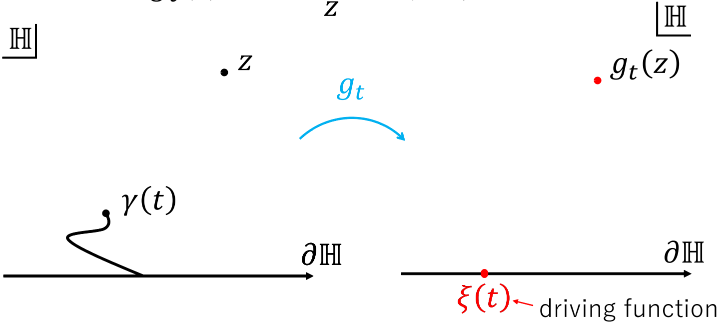
以下，この Schramm (2000) によるアイデアを解説する．

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して, 次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

half-plane capacity

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$

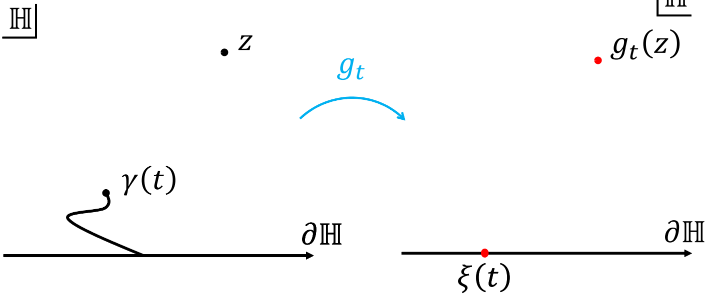


$\xi(t) := \lim_{z \to \xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である.

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して，次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$

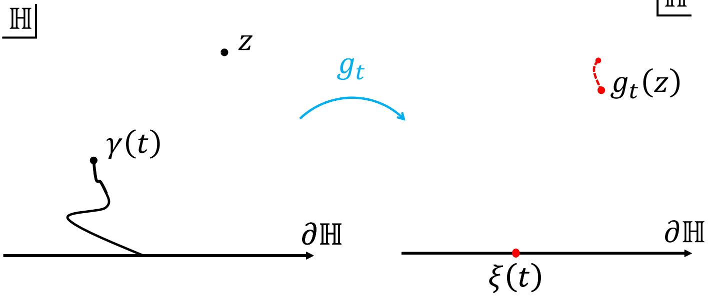


$\xi(t) := \lim_{z \to \xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である．

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して, 次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$

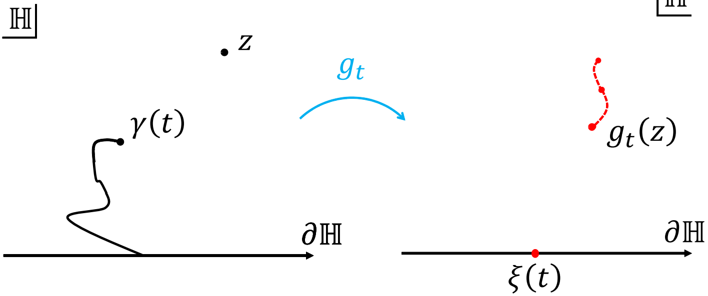


$\xi(t) := \lim_{z \to \xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である.

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して, 次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$

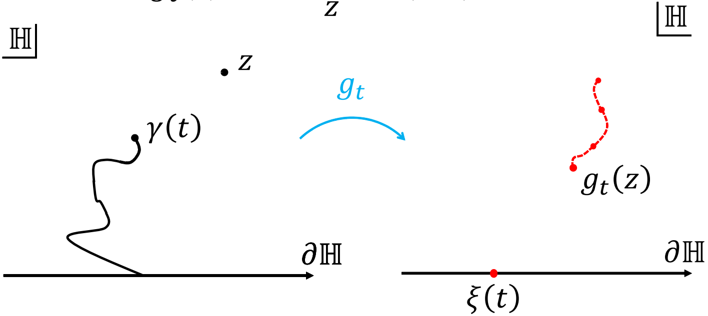


$\xi(t) := \lim_{z\to\xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である.

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して, 次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$



$\xi(t) := \lim_{z\to\xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である.

（コード型）Loewner 方程式

$a_t = 2t$ となるよう径数変更を施すと，次を得る．

Loewner 方程式 [Löwner ('23), Kufarev et al. ('68)]

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H}.$$

Remarks:

1. 定数倍を調節した右辺 $-\frac{1}{\pi}\frac{1}{z-\xi_0}$ の虚部は上半平面 $\mathbb{H}$ の（吸収壁 BM に付随する）Poisson 核である：

$$\Im\left(-\frac{1}{\pi}\frac{1}{z-\xi_0}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\xi_0)^2+y^2};$$

2. 写像 g_t（したがって曲線 γ）を $\xi(t)$ からこの方程式を経由して一意的に復元できる（Lipschitz 条件をみたすから）．

スケーリング極限の駆動函数

共形不変性と領域 Markov 性から，$I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\mathbb{H},0,\infty}(\xi(t) - \xi(s) \in I) \\
&= \int \mu_{\mathbb{H}\setminus\gamma(0,s],\gamma(s),\infty}(\tilde{\xi}(t-s) - \tilde{\xi}(0) \in I)\, d\mu_{\mathbb{H},0,\infty} \\
&= \int \mu_{\mathbb{H},\xi(s),\infty}(\tilde{\xi}(t-s) - \tilde{\xi}(0) \in I)\, d\mu_{\mathbb{H},0,\infty} = \mu_{\mathbb{H},0,\infty}(\xi(t-s) \in I).
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ $\xi(t)$ は定常独立増分.

$\xrightarrow{+\text{対称性}}$ 駆動函数 $\xi(t)$ は 1 次元標準 BM B_t の定数倍.

問

$\xi(t) = \sqrt{\kappa} B_t$ に対して Loewner 方程式の解は本当に等角写像を定めるか？補集合は単純曲線か？より一般の連続函数 $\xi(t)$ についてはどうか？

スケーリング極限の駆動函数

共形不変性と領域 Markov 性から，$I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\mathbb{H},0,\infty}(\xi(t) - \xi(s) \in I) \\
&= \int \mu_{\mathbb{H}\setminus\gamma(0,s],\gamma(s),\infty}(\tilde{\xi}(t-s) - \tilde{\xi}(0) \in I)\, d\mu_{\mathbb{H},0,\infty} \\
&= \int \mu_{\mathbb{H},\xi(s),\infty}(\tilde{\xi}(t-s) - \tilde{\xi}(0) \in I)\, d\mu_{\mathbb{H},0,\infty} = \mu_{\mathbb{H},0,\infty}(\xi(t-s) \in I).
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ $\xi(t)$ は定常独立増分.

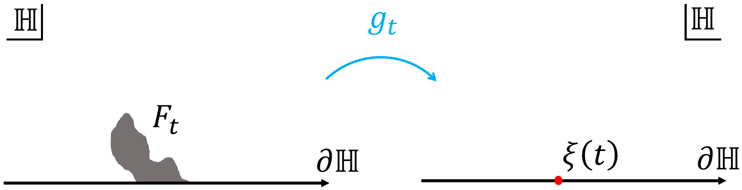
$\xrightarrow{+\text{対称性}}$ 駆動函数 $\xi(t)$ は 1 次元標準 BM B_t の定数倍.

問

$\xi(t) = \sqrt{\kappa} B_t$ に対して Loewner 方程式の解は本当に等角写像を定めるか？補集合は単純曲線か？より一般の連続函数 $\xi(t)$ についてはどうか？

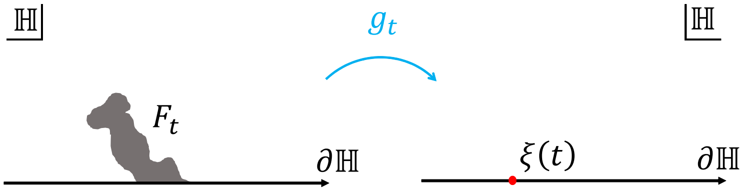
Loewner 方程式 $\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z)-\xi(t)}$ の初期値問題

- $\xi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ を固定したとき，各 $z \in \mathbb{H}$ について解 $g_t(z)$ の最大存在区間 $[0, t_z)$ が決まる．特に t_z は右辺の分母が消える時刻である：$\lim_{t\nearrow t_z}|g_t(z)-\xi(t)| = 0$.
- $F_t := \{z \in \mathbb{H}; t_z \leq t\}$ は単純曲線とは限らないが，$\mathbb{H}$ で相対閉かつ $\mathbb{H}\setminus F_t$ が単連結となるような有界集合（hull という）で，$g_t\colon \mathbb{H}\setminus F_t \to \mathbb{H}$ は等角写像となる．



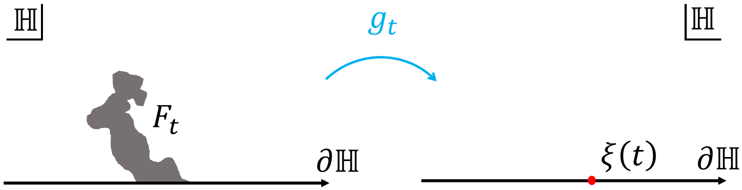
Loewner 方程式 $\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z)-\xi(t)}$ の初期値問題

- $\xi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ を固定したとき，各 $z \in \mathbb{H}$ について解 $g_t(z)$ の最大存在区間 $[0,t_z)$ が決まる．特に t_z は右辺の分母が消える時刻である：$\lim_{t\nearrow t_z}|g_t(z)-\xi(t)| = 0$.
- $F_t := \{z \in \mathbb{H}; t_z \le t\}$ は単純曲線とは限らないが，$\mathbb{H}$ で相対閉かつ $\mathbb{H} \setminus F_t$ が単連結となるような有界集合（hull という）で，$g_t : \mathbb{H} \setminus F_t \to \mathbb{H}$ は等角写像となる．



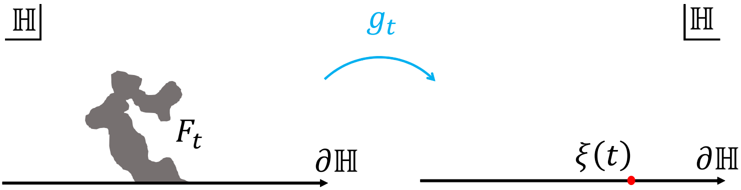
Loewner 方程式 $\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \xi(t)}$ の初期値問題

- $\xi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ を固定したとき，各 $z \in \mathbb{H}$ について解 $g_t(z)$ の最大存在区間 $[0, t_z)$ が決まる．特に t_z は右辺の分母が消える時刻である：$\lim_{t \nearrow t_z} |g_t(z) - \xi(t)| = 0$.
- $F_t := \{z \in \mathbb{H}; t_z \le t\}$ は単純曲線とは限らないが，$\mathbb{H}$ で相対閉かつ $\mathbb{H} \setminus F_t$ が単連結となるような有界集合（hull という）で，$g_t : \mathbb{H} \setminus F_t \to \mathbb{H}$ は等角写像となる．



Loewner 方程式 $\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z)-\xi(t)}$ の初期値問題

- $\xi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ を固定したとき，各 $z \in \mathbb{H}$ について解 $g_t(z)$ の最大存在区間 $[0, t_z)$ が決まる．特に t_z は右辺の分母が消える時刻である：$\lim_{t \nearrow t_z} |g_t(z) - \xi(t)| = 0$.
- $F_t := \{z \in \mathbb{H}; t_z \leq t\}$ は単純曲線とは限らないが，$\mathbb{H}$ で相対閉かつ $\mathbb{H} \setminus F_t$ が単連結となるような有界集合（hull という）で，$g_t : \mathbb{H} \setminus F_t \to \mathbb{H}$ は等角写像となる．



Stochastic Loewner Evolution

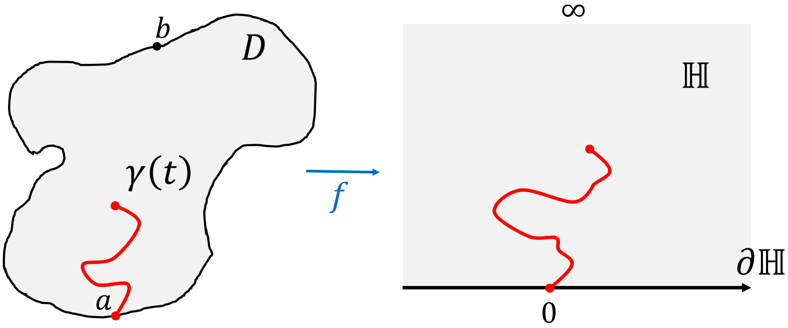
- $\xi(t) = \sqrt{\kappa}B_t$, $\kappa > 0$ を駆動函数として定まる hull の増大族 $\{F_t\}_{t\geq 0}$ を SLE_κ と呼ぶ.
- $\kappa \leq 4$ のとき，$\{F_t\}$ は a.s. で単純曲線である．$\kappa > 4$ のときは「横断的な自己交差を持たない」曲線の filling であり，F_t 自体は $t \to \infty$ で $\mathbb{H}$ 全体を埋め尽くす．特に $\kappa \geq 8$ ならば曲線そのものが埋め尽くし曲線である.

Notes:

- Schramm (2000) が SLE を導入し，LERW, UST, percolation のスケーリング極限となることを予言した.
- Lawler, Schramm & Werner (2004) は LERW と UST がそれぞれ SLE_2 と SLE_8 に収束することを証明した.
- Smirnov (2001) は三角格子上のサイトパーコレーションが SLE_6 に収束することを示した.

Stochastic Loewner Evolution

- 前項で定義したのは，$\mathbb{H}$ 上の 0 から ∞ に向かう SLE_κ.
- 等角不変性に注意して，一般の単連結領域 D 上の $a \in \partial D$ から $b \in \partial D$ に向かう SLE_κ は等角写像 $f\colon D \to \mathbb{H}$, $f(a) = 0$, $f(b) = \infty$ による引き戻しで定義する.



1. SLE(確率的 Loewner 発展) についてのレビュー
   - SLE の定義
   - 局所性，ガウス自由場との関係
2. 小松・Loewner 方程式
   - 単純曲線に対するコード型小松・Loewner 方程式
   - 連続な hull に対する小松・Loewner 方程式（講演者の結果）

SLE_6 の局所性 (locality)

Theorem (Lawler, Schramm & Werner ('01, '03))

- V: 0 の単連結な $\mathbb{H}$ 近傍，h: $V \hookrightarrow \mathbb{H}$: 正則単射（単葉）
- $\{F_t\}$: $\mathbb{H}$ 上の SLE_6
- $T := \sup\{F_t \subset V\}$, $T' := \sup\{F_t \subset h(V)\}$

このとき，時間変更を除いて次の二つの分布が一致する：

$$(h(F_t); t < T) \overset{law}{=} (F_t; t < T').$$

- SLE_6 は境界に hit するまで「境界を感じない」.
- $\kappa = 6$ はパーコレーションに対応する.
- 証明は h により変換された駆動函数に伊藤の公式を適用して，ドリフト項が消えることを確かめる.

離散ガウス自由場の定義

- $G = (V, E)$: 有限グラフ
- $\emptyset \neq V_\partial \subset V$: 「境界」, $X_\partial : V_\partial \to \mathbb{R}$: 「境界値」
- $\Omega := \{X : V \to \mathbb{R}; X = X_\partial \text{ on } V_\partial\} = \mathbb{R}^{V \setminus V_\partial}$

G 上の X_∂ を境界値とする discrete Gaussian free field (DGFF) とは,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\in E}(X(u) - X(v))^2\right)$$

に比例した密度をもつ $\Omega = \mathbb{R}^{V \setminus V_\partial}$ 上の多次元 Gauss 確率変数である.

離散ガウス自由場の収束

- X: $\mathbb{H}$ の三角格子上の DGFF
- 適切な定数 $\lambda > 0$ に対して $\mathbb{R}_+$ 上で $X = \lambda$ かつ $\mathbb{R}_-$ 上で $X = -\lambda$ なる境界条件をみたす.
- 原点を出発して $\{X < 0\}$ と $\{X > 0\}$ の間を（パーコレーションと同様に）走る相境界 γ_X を考える.

Theorem (Schramm & Sheffield (2009))

γ_X のスケーリング極限は SLE_4 である.
（実際には境界条件を非対称にすると，SLE_4 の変種に収束することまで示されている.）

（古典的な）Conformal Welding

- Γ: Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の Jordan 曲線
- D_1, D_2: $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ の 2 つの連結成分

このとき，等角写像 $f_1 : \mathbb{D} \to D_1$, $f_2 : \mathbb{D} \to D_2$ は閉包まで同相拡張されるから，$\partial\mathbb{D}$ 上の同相写像 $\phi = f_1^{-1} \circ f_2$ が誘導される．

問． 与えられた同相写像 $\phi\colon \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ に対して，それを誘導するような Γ, f_1, f_2 は存在するか？

Quantum Conformal Welding

Sheffield (2016) の結果（の一部）：

- $\kappa \in (0,4)$, $\gamma := \sqrt{\kappa}$
- η: 原点と ∞ を結ぶ $\mathbb{H}$ の SLE_κ 曲線
- X: $\mathbb{H}$ 上の連続 GFF
- D_1, D_2: $\mathbb{H} \setminus \eta$ のそれぞれ左側，右側の連結成分
- X^{D_1}, X^{D_2}: X の D_1, D_2 への制限

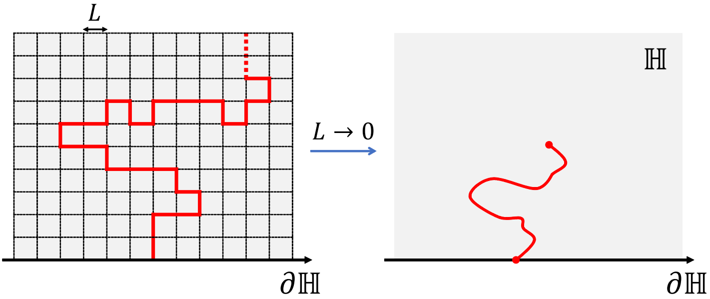
このとき，(D_1, X^{D_1}), (D_2, X^{D_2}) は独立な「γ-quantum surface」であり，それらの η に沿った「quantum boundary length」は一致する．

- γ-quantum surface: Liouville 量子重力 $(D, e^{\gamma X(x)}\,dx)$ の定義を共形変換との整合性などの観点からいじったもの．
- quantum boundary length: Liouville 測度から自然に定まる境界の長さに相当する測度

1. SLE(確率的 Loewner 発展) についてのレビュー
   - SLE の定義
   - 局所性，ガウス自由場との関係
2. 小松・Loewner 方程式
   - 単純曲線に対するコード型小松・Loewner 方程式
   - 連続な hull に対する小松・Loewner 方程式（講演者の結果）

問

- これまで単連結な領域でのみ SLE を考えてきた．
- では下図のように,「穴の開いた」領域に適切な統計物理模型を定義したとき，そのスケーリング極限を同様のアイデアで調べることはできるだろうか？

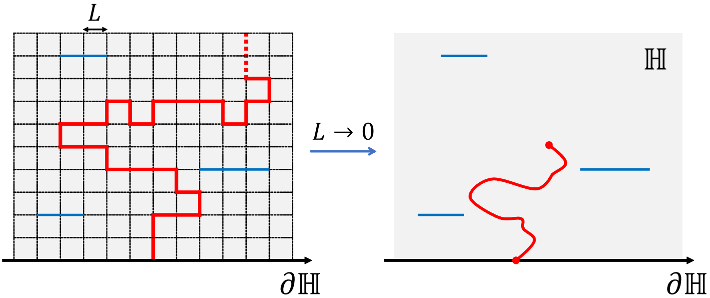


函数論からは多重連結領域に対応する Loewner 方程式があるか？

⟶ 小松・Loewner 方程式

問

- これまで単連結な領域でのみ SLE を考えてきた．
- では下図のように,「穴の開いた」領域に適切な統計物理模型を定義したとき，そのスケーリング極限を同様のアイデアで調べることはできるだろうか？

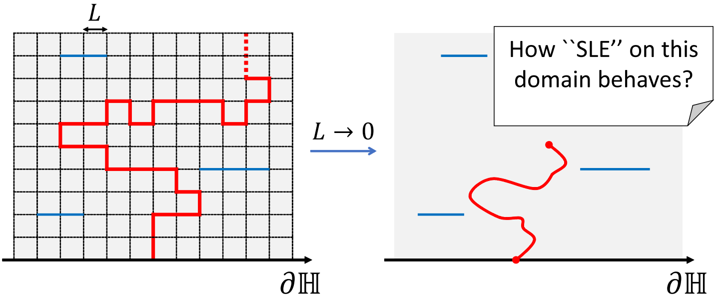


函数論からは多重連結領域に対応する Loewner 方程式があるか？

$\longrightarrow$ 小松・Loewner 方程式

問

- これまで単連結な領域でのみ SLE を考えてきた.
- では下図のように,「穴の開いた」領域に適切な統計物理模型を定義したとき，そのスケーリング極限を同様のアイデアで調べることはできるだろうか？

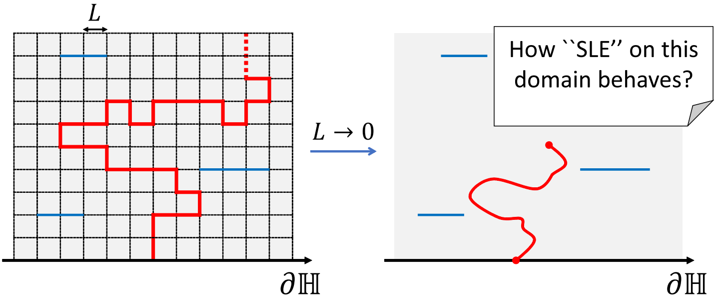


函数論からは多重連結領域に対応する Loewner 方程式があるか？

$\longrightarrow$ 小松・Loewner 方程式

問

- これまで単連結な領域でのみ SLE を考えてきた．
- では下図のように,「穴の開いた」領域に適切な統計物理模型を定義したとき，そのスケーリング極限を同様のアイデアで調べることはできるだろうか？



函数論からは多重連結領域に対応する Loewner 方程式があるか？

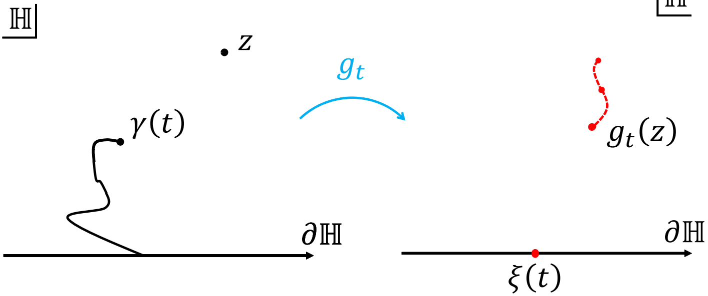
$\longrightarrow$ 小松・Loewner 方程式

- Komatu (1950)
- Bauer & Friedrich (2004, 08)
  彼らは函数論で標準的な Green 函数と調和測度にもとづいた議論により，方程式の右辺の正則ベクトル場の形を導出した．
- Lawler (2006), Drenning (2011)
  右辺のベクトル場を excursion reflected BM の Poisson 核により解釈
- Chen, Fukushima & Rohde (2016)
  BM with darning の厳密な構成と Poisson 核の精密な評価を Dirichlet 形式論と PDE の内部変分法を用いて展開

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset \mathbb{H}$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して，次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \to \mathbb{H}$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \qquad z \to \infty.$$

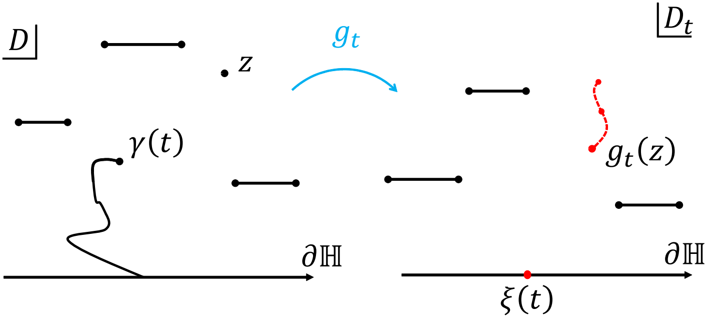


$\xi(t) := \lim_{z\to\xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である．

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して, 次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : D \setminus \gamma(0, t] \to D_t$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \quad z \to \infty.$$

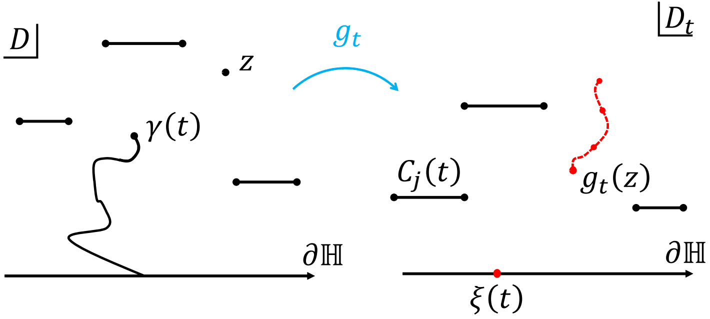


$\xi(t) := \lim_{z \to \xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である.

単純曲線からきまる等角写像族

- γ: $\gamma(0) \in \partial\mathbb{H}$, $\gamma(0, t_\gamma) \subset D$ をみたす単純曲線
- 各 $t > 0$ に対して，次の流体力学的正規化条件をみたす等角写像 $g_t : D \setminus \gamma(0, t] \to D_t$ が唯一つ存在する：

$$g_t(z) = z + \frac{a_t}{z} + o(z^{-1}), \quad z \to \infty.$$



$\xi(t) := \lim_{z \to \xi(t)} g_t(z)$. a_t は連続かつ狭義単調増加である．

$g_t(z)$, $C_j(t) = [z_j(t), z_j^r(t)]$ のみたす方程式

小松・Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = -2\pi \Psi_{D_t}(g_t(z), \xi(t)), \quad g_0(z) = z \in D$$

スリットに対する小松・Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt} z_j(t) = -2\pi \Psi_{D_t}(z_j(t), \xi(t)), \frac{d}{dt} z_j^r(t) = -2\pi \Psi_{D_t}(z_j^r(t), \xi(t))$$

$\Psi_D(z, \xi_0)$ は $z \in D$ の函数として

- $z \to \infty$ で消えていて,
- 虚部が D 上の滕り Brown 運動（BM with darning, BMD）の Poisson 核 $K_D^*(z, \xi_0)$ に一致する

ような唯一つの正則函数である.

BM with darning

各スリット C_j を一点 c_j^* とみなして，等化空間

$$D^* := D \cup \{ c_1^*, \ldots, c_N^* \}$$

を考える．

Definition

D^* 上の BMD とは，m 対称拡散過程で次をみたすもの：

- D 上の subprocess は D 上の吸収壁 BM,
- $K^* := \{ c_1^*, \ldots, c_N^* \}$ 上では kill されない．

(m は Lebesgue 測度を $m(K^*) = 0$ により D^* 上に拡張したもの．)

小松・Loewner 方程式に対する初期値問題

詳細は述べないが，やはり $\forall\xi \in C([0,\infty);\mathbb{R})$ に対して

- $t_z := \sup\{t > 0; |g_t(z) - \xi(t)| > 0\}$
- $F_t := \{z \in D; t_z \le t\}$

とおけば，$\{F_t\}$ は hull の増大族，$g_t : D \setminus F_t \to D_t$ は等角写像となる．

特に 1 次元 BM の一般化として，駆動函数 $\xi(t)$ のみたす SDE

$$d\xi(t) = \alpha(\xi(t), D_t)\, dB_t + b(\xi(t), D_t)\, dt$$

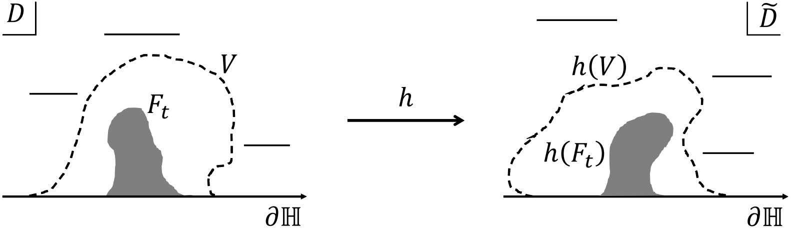
を与えることで，stochastic Komatu–Loewner evolution $\mathrm{SKLE}_{\alpha,b}$ が定義され（Chen & Fukushima ('18)），SLE_κ との関係も調べられた（Chen, Fukushima & Suzuki ('17)）．

1. SLE(確率的 Loewner 発展) についてのレビュー
   - SLE の定義
   - 局所性，ガウス自由場との関係
2. 小松・Loewner 方程式
   - 単純曲線に対するコード型小松・Loewner 方程式
   - 連続な hull に対する小松・Loewner 方程式（講演者の結果）

等角写像による変換

仮に $\{F_t\}$ がある $\xi(t)$ に駆動される小松・Loewner 発展だとしても，等角写像 $h\colon V \hookrightarrow \tilde{D}$ により変換された $\tilde{F}_t := h(F_t)$ が再びそうなるとは限らない．

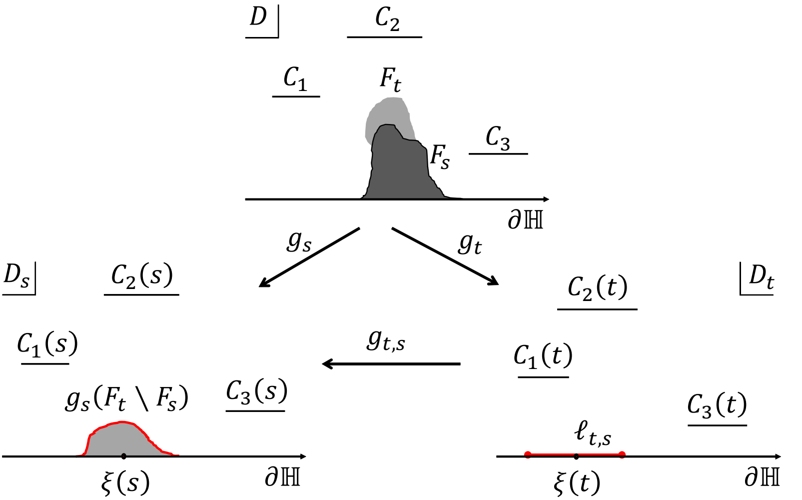
なぜなら，先行研究では hull が単純曲線の場合にしか小松・Loewner 方程式が導出できていないからである．



$\longrightarrow$ 局所性などを厳密に調べるにはどうすればよいのか？

Growing hulls の右連続性

$0 \le s < t$ に対して，合成 $g_{t,s} := g_s \circ g_t^{-1} \colon D_t \to D_s \setminus g_s(F_t \setminus F_s)$ を考える．右連続性： $\overline{g_s(F_t \setminus F_s)} \to \{\xi(s)\}$



Drenningの不等式

Lemma (Drenning ('11), M.('18+))

$r_t := \sup\{|z|; z \in F_t\}$. とおく．局所有界函数 $C(z)$ が存在して，
$|z| \geq 2r_t$ をみたすすべての z に対して

$$|z - g_t(z) - \pi a_t \Psi_{D_t}(z, 0)| \leq C(z) r_t a_t.$$

(a_t は F_t の half-plane capacity.)

Drenning はこの不等式を ERBM の観点で定式化した．

cf. Lawler, Schramm & Werner ('01) による $D = \mathbb{H}$ のときの評価：

$$\left| z - g_t^0(z) + \frac{a_t^0}{z} \right| \leq C \frac{r_t a_t^0}{|z|^2}.$$

連続な Hull に対する小松・Loewner 方程式

$\{F_t\}$ の「連続性」を函数論における核収束を用いて定義し，以下の結果を示した.

Theorem (M. ('18+))

$\{F_t\}$ の「連続性」および「右から一点に収束する性質」は，任意の等角写像に対して不変である.

Theorem

次の 2条件は同値：

1. $\{F_t\}$ は各時刻で「左連続」かつ「右から一点に収束する」.
2. $g_t(z)$ と D_t は（真の微分の意味で）小松・*Loewner* 方程式をみたす.

$\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},-b_{\mathrm{BMD}}}$ の局所性

Theorem (Chen, Fukushima & Suzuki ('17), M.('18+))

- $D, \tilde{D}$: 標準截線領域（連結度が異なってもよい）
- $V \subset D$: 0 の $\mathbb{H}$ 近傍，h: $V \hookrightarrow \tilde{D}$: 正則単射（単葉）
- $\{F_t\}$: D 上の $\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},-b_{\mathrm{BMD}}}$, $\{\tilde{F}_t\}$: $\tilde{D}$ 上の $\mathrm{SKLE}_{\sqrt{6},-b_{\mathrm{BMD}}}$
- $T := \sup\{F_t \subset V\}$, $T' := \sup\{F_t \subset h(V)\}$

このとき，時間変更を除いて次の二つの分布が一致する：

$$(h(F_t); t < T) \overset{law}{=} (\tilde{F}_t; t < T').$$