Free infinite divisibility for generalized power distributions with free Poisson term (GPFP 分布の自由無限分解性)

森下 順貴

北海道大学大学院 理学院 数学専攻博士課程 1 年
(指導教員 長谷部 高広 准教授)

平成３０年度 確率論ヤングサマーセミナー
Aug, 20, 2018.

1. **序文**
2. **準備 (自由確率論)**
   - 非可換確率空間
   - 自由独立性
   - $*$-分布
   - Cauchy-変換
   - Voiculescu-変換
   - FID 性
   - UI 性
3. **本題**
   - 先行研究 Free Poisson
   - fGIG
   - GPFP
   - 研究課題

参考文献

講演の内容
[1]Junki Morishita and Yuki Ueda
“ *Free infinite divisibility for generalized power distributions with free Poisson term* ”, *arXiv:1806.07738v2.*

先行研究
[2] *T. Hasebe*
“ *Free infinite divisibility for powers of random variables* ”, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **13**, *309-336 (2016).*

[3] *A. Nica and R. Speicher*

“ *Lectures on the Combinatorics of Free Probability* ”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **335**, *Cambridge University Press, 2006.*
[4]*H. Bercovici and D. V. Voiculescu*
“ *Free convolution of measures with unbounded support* ”, *Indiana Univ. Math. J.* **42** *(3), 733-773 (1993).*
[5]*T. Hasebe, K. Szpojankowski,*

“ *On the free generalized inverse gaussian distributions, to appear in Complex Analysis and Operator Theory* ”, *arxiv:1710.04572.*

非可換確率空間

Definition

$\mathcal{A}$: $*$-代数 (1 を持つ),
φ: 状態 (正値線形汎関数で $\varphi(1) = 1$ を満たすもの),
組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間と言う .
また $\mathcal{A}$ の元を確率変数という.

Example

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対し, $\mathcal{A} = L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P}) = \cap_{1 \le p < \infty} L^p(\Omega, \mathbb{P})$, $\varphi = \mathbb{E}$.

Example

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$, $\xi_0 \in \mathcal{H}$, $< \xi_0, \xi_0 >^{1/2} = 1$ に対し, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$,
$\varphi(\cdot) = < \cdot \xi_0, \xi_0 >$.

自由確率論の重要な概念

自由独立性,
$*$-分布,
Cauchy-変換, Voiculescu-変換,
自由たたみ込み,
FID 性 (自由無限分解可能性).

自由独立性

Definition

$(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間, $A, B \in \mathcal{A}$ が自由独立であるとは全ての自然数 n と $2n$ 個の多項式 $p_1, \ldots, p_{2n}$ で, 全ての $1 \leq i \leq n$ を満たす i に対して $\phi[p_{2i-1}(A)] = \phi[p_{2i}(B)] = 0$ が成り立つならば,

$$\phi[p_1(A)\,p_2(B)\cdots p_{2n-1}(A)\,p_{2n}(B)] = 0$$

が成り立つときに言う.

∗-分布

Definition

$(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間, $A \in \mathcal{A}$ を正規とする. つまり, $A^*A = AA^*$. このときコンパクトサポートを持つ $\mathbb{C}$ 上の分布 μ が存在して

$$\int z^k \bar{z}^l d\mu(z) = \phi(A^k (A^*)^l), \quad {}^\forall k, l \in \mathbb{N}$$

を満たすとする。この μ を A の $*$-分布という.

Proposition

上の定義で $\mathcal{A}$ が C^*-代数のとき, A は $*$-分布をもち

1. μ の台 $((supp)\{\mu\})$ が A のスペクトル集合 $(\mathrm{Sp}(A))$ に含まれる.
2. 任意の $\mathrm{Sp}(A)$ 上の連続関数 f に対し

$$\int f d\mu = \phi(f(A))$$

を満たす. ここで $f(A) \in \mathcal{A}$ は汎函数計算とする.

Cauchy-変換

Definition

μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度とする．このとき μ の *Cauchy*-変換を次で定義する．

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus supp(\mu).$$

$G_\mu(z)$ は $\mathbb{C}^+$ 上の正則関数である．

右逆写像 $G_\mu{}^{-1}(z)$

Proposition (Bercovici,Voiculescu)

任意の $\gamma > 0$ に対し, $\lambda, M, \delta > 0$ が存在して G_μ が領域 $\Gamma_{\lambda,M}$ で単葉となる.

$$\Gamma_{\lambda,M} := \{z \in \mathbb{C}^+ : \lambda|Re(z)| < Im(z), Im(z) > M\},$$

さらに, 像 $G_\mu(\Gamma_{\lambda,M})$ は領域 $\Lambda_{\gamma,\delta}$ を含む.

$$\Lambda_{\gamma,\delta} := \{z \in \mathbb{C}^- : \gamma|Re(z)| < -Im(z), Im(z) > -\delta\}.$$

よって, 右逆写像 $G_\mu{}^{-1}(z)$ が $\Lambda_{\gamma,\delta}$ 上に存在する.

Voiculescu-変換

Definition

μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度とする．このとき μ の *Voiculescu*-変換を次で定義する．

$$\phi_\mu(z) := G_\mu^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) - z, \qquad \frac{1}{z} \in \Lambda_{\gamma,\delta}.$$

Proposition

任意の $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ と ν に対し，確率測度 λ が一意に存在して

$$\phi_\lambda(z) = \phi_\mu(z) + \phi_\nu(z)$$

を領域の共通部分の z に対し満たす．

λ を μ と ν の自由たたみ込み $(\mu \boxplus \nu)$ という．

FID 性

Definition

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}$ 上の確率測度 ρ_n が存在して $\mu = \rho_n^{\boxplus n}$ を満たすとき *(FID)* 自由無限分解可能分布という.

Proposition

TFAE,

1. μ が *FID.*
2. μ の *Voiculescu-*変換 ϕ_μ が $\mathbb{C}^+$ から $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$ に解析接続を持つ.

特に次の表現を持つ. *(Pick-Nevanlinna representation)*

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+xz}{z-x} d\sigma(x), \qquad z \in \mathbb{C}^+.$$

ここで, $\gamma \in \mathbb{R}$, σ は $\mathbb{R}$ 上の非負値有限測度で一意に定まる.

UI 性

Definition

$\mathcal{UI} := \{\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ : μ の *Cauchy*-変換の逆関数 G_μ^{-1} が $\mathbb{C}^-$ に単葉に解析接続を持つ $\}$

$\mathcal{UI}$ は弱収束について閉じている.
$\mathcal{UI} \subset$ (FID 全体)

先行研究 Free Poisson

$$d\mathbf{fp}(p)(x) := \max\{1-p,0\}\delta_0 + \frac{\sqrt{((\sqrt{p}+1)^2-x)\,(x-(\sqrt{p}-1)^2)}}{2\pi x}1_{((\sqrt{p}-1)^2,(\sqrt{p}+1)^2)}(x)dx$$

Theorem (Hasebe)

X を *free Poisson* 分布 $\mathbf{fp}(p)$ に従う確率変数とする.

1. $p \geq 1,\ r \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ または
2. $0 < p < 1,\ r \geq 1$ のとき,

$X^r \sim \mathcal{UI}$(X^r の分布が $\mathcal{UI}$ に入る)

先行研究 Free Poisson

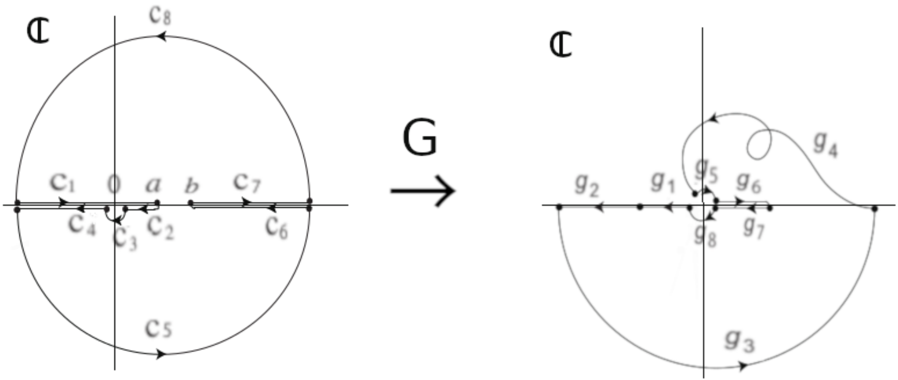
[証明のアイデア]
$p > 1, r > 1$ の場合, X^r の pdf は

$$f(x) = C\frac{\sqrt{(b^s - x^s)(x^s - a^s)}}{x}1_{(a,b)}(x),$$

$C > 0, 0 < s < 1, 0 < a < b : (p, r$ に依存した定数).
この密度関数の Cauchy-変換は $\mathbb{C}^+ \cup (a, b) \cup \mathbb{C}^-$ 上に解析接続され,
$\mathbb{C}^+ \cup [a, b] \cup \mathbb{C}^- \cup ((-\infty, a] \cup [b, \infty) + i0) \cup ((-\infty, a] \cup [b, \infty) - i0) \setminus \{0 - i0\}$
上連続である. さらに次のような経路に対して Cauchy-変換の像の概形が次のように定まる.

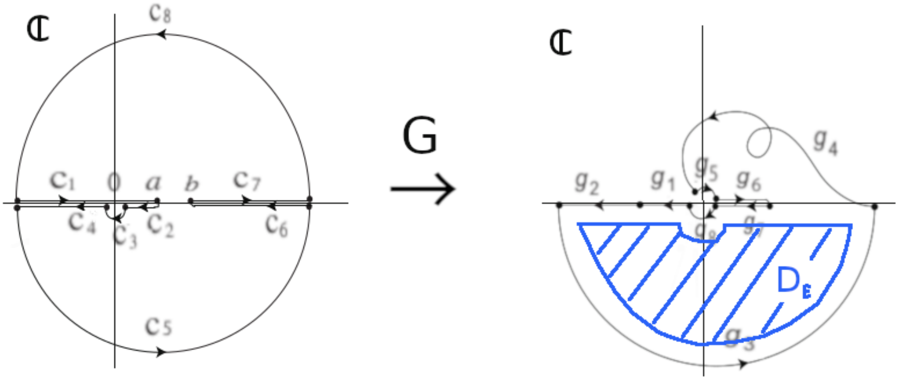
先行研究 Free Poisson

[証明のアイデア]



先行研究 Free Poisson

[証明のアイデア]
任意の $\varepsilon > 0$ に対し $D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^- : \varepsilon < |z| < \frac{1}{\varepsilon}\}$ 上 G^{-1} が定義できる.



先行研究 Free Poisson

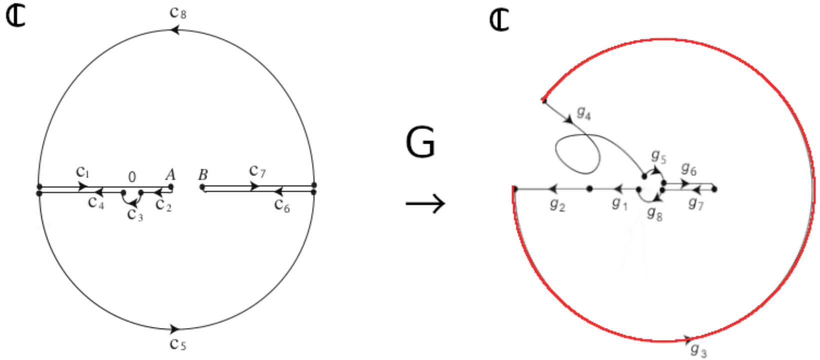
[証明のアイデア]
$p > 1, r < -1$ の場合, X^r の *pdf* は

$$h(x) = C\frac{\sqrt{(B^t - x^t)(x^t - A^t)}}{x^{1+t}} 1_{(A,B)}(x),$$

$C > 0, 0 < t < 1, 0 < A < B : (p, r$ に依存した定数).
同様に *Cauchy* 変換の次の像の概形を得る.

先行研究 Free Poisson

[証明のアイデア]



fGIG

Definition (fGIG (the free Generalized Inverse Gaussian) 分布)

$fGIG(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ を次の pdf を持つ分布とする.

$$fGIG(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi x}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{abx}}\right) \cdot 1_{(a,b)}(x)dx.$$

$\lambda \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2 > 0, 0 < a < b$ で次を満たす.

$$\begin{cases} 1 - \lambda + \alpha_1\sqrt{ab} - \alpha_2\frac{a+b}{2ab} = 0 \\ 1 + \lambda + \frac{\alpha_2}{\sqrt{ab}} - \alpha_1\frac{a+b}{2} = 0. \end{cases}$$

Proposition

確率変数 X が $fGIG$ に従うとき, $X^r \sim \mathcal{UI} \quad (|r| \geq 1)$.

fGIG

[証明の概要]
確率変数 X が fGIG に従うとき, $X^r, r > 1$ の pdf は

$$f(x) := \frac{s\sqrt{(B^s - x^s)(x^s - A^s)}}{2\pi x}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{abx^s}}\right) 1_{(A,B)}(x)dx, \qquad (1)$$

$s = 1/r, A = a^r, B = b^r$.
Free Poisson の密度関数のような関数の重ね合わせになっている.

fGIG

[証明の概要]

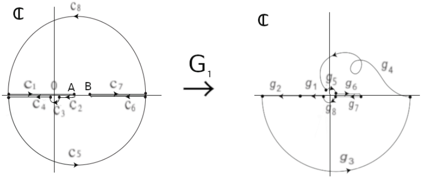
$$f_1(x) := \frac{s\sqrt{(B^s - x^s)(x^s - A^s)}}{2\pi x}\alpha_1 1_{(A,B)}(x)dx,$$
$$f_2(x) := \frac{s\sqrt{(B^s - x^s)(x^s - A^s)}}{2\pi x}\frac{\alpha_2}{\sqrt{ab}x^s}1_{(A,B)}(x)dx.$$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,

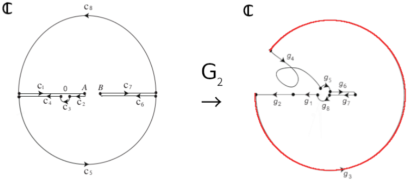
$$G_k(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f_k(x)}{z - x}dx, \qquad k = 1, 2,$$

$G_{X^r}(z) = G_1(z) + G_2(z)$. Free Poisson の証明と同様の経路に対し，次の $G_1(z), G_2(z)$ の像の概形が得られる．

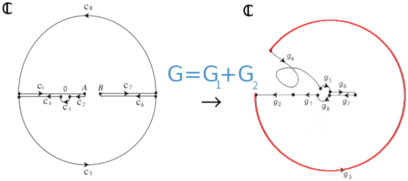
fGIG



$$G_1(z) = -\frac{s\alpha_1\sqrt{(AB)^s}}{z}(1+o(1)),\quad z\to 0,\ \arg(z)\in(-\pi,0).$$



$$G_2(z) = -\frac{s\alpha_2\sqrt{(AB)^s}}{\sqrt{ab}\,z^s}(1+o(1)),\quad z\to 0,\ \arg(z)\in(-\pi,0).$$



$$G_1(z)+G_2(z) = -\frac{s\alpha_2\sqrt{(AB)^s}}{\sqrt{ab}\,z^s}(1+o(1)),\quad z\to 0,\ \arg(z)\in(-\pi,0).$$

GPFP

Definition

GPFP 分布 (the generalized power distributions with free Poisson term) を次の pdf を持つ分布とする.

$$f_{a,b,N,\alpha,l}(x)dx = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{x} \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{x^{l_k}} 1_{(a,b)}(x)dx \tag{2}$$

ここで, $0 < a < b$, $N \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (0, \infty)^N$, $\int_a^b f_{a,b,N,\alpha,l}(x)dx = 1$, $l = (l_1, \ldots, l_N) \in \mathbb{R}^N_<$.

GPFP

Theorem

確率変数 $X \in \mathcal{A}$ が *GPFP* 分布に従い，さらに $I \in [t, t+1]^N_<$, $t \geq 0$ とする．このとき任意の $r \geq 1$ に対し $X^r \sim \mathcal{UI}$.
得に，$I \in [0,1]^N_<$ のとき，このとき任意の $|r| \geq 1$ に対し $X^r \sim \mathcal{UI}$.

・GPFP は Free Poisson の $p > 1$ の場合や FGIG を含み，上は確率変数 X がこれらの分布に従うとき，$X^r \sim \mathcal{UI}$ であったことと一致する．
・仮定 $I \in [t, t+1]^N_<$, $t \geq 0$ と $r \geq 1$ を外した場合それぞれに X^r が FID でない反例がある．

GPFP

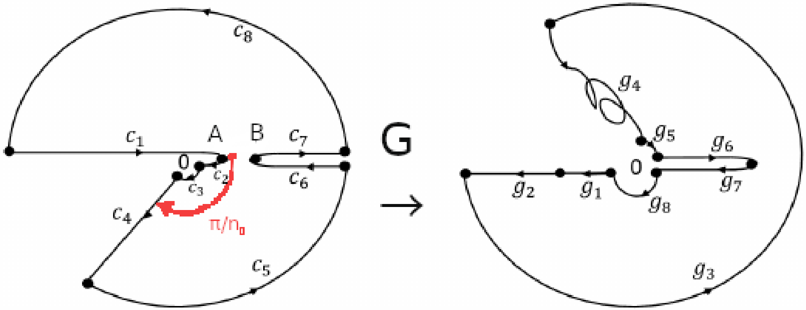
[証明の概要]
確率変数 X が GPFP に従うとき, $X^r, r > 1$ の pdf は

$$h(x)dx = \frac{s\sqrt{(B^s - x^s)(x^s - A^s)}}{x} \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{x^{sl_k}} \cdot 1_{(A,B)}(x)dx,$$

$s = 1/r, A = a^r, B = b^r$.
次の経路に対し, 次の Cauchy-変換の像の概形を得る.

GPFP

[証明の概要]



$n_0 = s[t] + 1.$

研究課題

- GPFP を一般化

1. Free Poisson 項の一般化 (例えば $(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta},\dots$)
2. 有限和から級数
3. atom を持つ場合

- $X \sim GPFP$ のとき, X^r が FID になる必要十分条件？