正則 CONS に関して Ogawa 可積分な乱関数の確率 Fourier 係数による同定可能性

星野　浄生

大阪府立大学大学院 理学系研究科
情報数理科学専攻 博士後期課程 3 年

2018 年 8 月 21 日

講演の流れ

1. 予備知識と研究の概要
   - 1-1　非因果的確率積分
   - 1-2　Skorokhod 積分
   - 1-3　Ogawa 積分
   - 1-4　確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定
   - 1-5　先行研究と本研究
2. 先行結果と主結果
   - 2-1　先行結果
   - 2-2　主結果：同定可能性 I
   - 2-3　主結果：同定可能性 II

記号と用語

$(B_t)_{t\in[0,\infty)}$: filter 付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}, P)$ 上の Brown 運動

$f : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ が乱関数 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f は $\mathcal{L}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$-可測

注) 乱関数 $f(t)$ は

$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$-adapted とも
$t \in [0,\infty)$ 毎に $\mathcal{F}_\infty$-可測とも限らない.

乱関数 X, Y と $t \in (0,\infty)$ に対し,

$\langle X, Y \rangle_t$: X と Y の t での cross variation (存在するとき)

$[X]_t = \langle X, X \rangle_t$: X の t での quadratic variation (存在するとき)

記号と用語

$\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} 1 & , 0 \leq \arg z < \pi \\ -1 & , -\pi \leq \arg z < 0 \end{cases} \qquad (\arg 0 := 0)$$

1-1：非因果的確率積分

- 古典的 (因果的) 確率積分 $\int f(t,\omega)\, dB_t$

被積分乱関数 f は '因果的'
i.e. '$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$-adapted'

・Itô 積分 ($\int\ dB$)
・Stratonovich 積分 ($\int \circ dB$)　etc.

1-1：非因果的確率積分

- 古典的 (因果的) 確率積分 $\int f(t,\omega)\,dB_t$

  被積分乱関数 f は '因果的'
  i.e. '$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$-adapted'

  ・Itô 積分 ($\int\ dB$)
  ・Stratonovich 積分 ($\int\ \circ dB$)　etc.

- 非因果的確率積分 $\int f(t,\omega)\,dB_t$

  被積分乱関数 f は '非因果的'
  i.e. '因果的とは限らない'

  ・Skorokhod 積分 (Itô 積分の拡張)
  ・Ogawa 積分 (Stratonovich 積分の拡張)　etc.

1-2 : Wiener chaos と Skorokhod 積分

$\mathcal{F}^B := \sigma(B_t \,|\, t \in [0,1])$

$L^2_B([0,1]^i \times \Omega) = L^2([0,1]^i \times \Omega, \mathcal{L}([0,1]^i) \otimes \mathcal{F}^B, \lambda^{\otimes i} \otimes P)$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$k \in L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n := \{k \in L^2[0,1]^n \,|\, k$ は symmetric$\}$ に対し,

$I_n(k) = n! \int_0^1 \big(\int_0^{u_1} \cdots \big(\int_0^{u_{n-1}} k(u_1, ..., u_n)\, dB_{u_n} \big) \cdots dB_{u_2} \big)\, dB_{u_1}$ (Itô)

定理 (Wiener-Itô 定理)

$$L^2_B(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n)$$

・(非因果的) Wiener 汎関数 $f \in L^2_B([0,1] \times \Omega)$ は

$$f(t,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t;\cdot)) \quad \big(k_n^f(t;\cdot) \in L^2_{\mathrm{sym}}[0,1]^n \big)$$

と分解される.

1-2：Wiener chaos と Skorokhod 積分

定義 1 (Sobolev 空間)

$i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $r \in [0, \infty)$ に対し，

$$\mathcal{L}_i^{r,2} := \Big\{ f \in L_B^2([0,1]^i \times \Omega) \ \Big| \ |f|_{\mathcal{L}_i^{r,2}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^r n! \, |k_n^f(\cdot;\cdot)|_{L^2[0,1]^{i+n}}^2 < \infty \Big\}$$

1-2：Wiener chaos と Skorokhod 積分

定義 2 (Malliavin 微分)

$f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$，分解表示：$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\big(k_n^f(s;\dot{u}_1,...,\dot{u}_n)\big)$ に対し，

$$D_t f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}\big(k_n^f(s;\dot{u}_1,...,\dot{u}_{n-1},t)\big) \quad \text{in } \mathcal{L}_2^{0,2}$$

1-2：Wiener chaos と Skorokhod 積分

定義 3 (Skorokhod 積分)

$f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$，分解表示：$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\big(k_n^f(t;\dot{u}_1,...,\dot{u}_n)\big)$ に対し，

$$\int_0^1 f(t)\,\delta B_t := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}\big(\hat{k}_n^f(\dot{u}_{n+1};\dot{u}_1,...,\dot{u}_n)\big) \quad \text{in } \mathcal{L}_0^{0,2}$$

1-3：Ogawa 積分

定義 4 (Ogawa 積分)

・$f \in L^0(\Omega; L^2([0,1];\mathbb{C}))$, $T \in \mathcal{L}([0,1])$.

・$\varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1];\mathbb{K})$ の (orderd) CONS.

1-3 : Ogawa 積分

定義 4 (Ogawa 積分)

$\cdot\, f \in L^0(\,\Omega\,;\, L^2([0,1];\mathbb{C})\,),\, T \in \mathcal{L}([0,1])$.

$\cdot\, \varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1]\,;\mathbb{K})$ の (orderd) CONS.

- φ に関する Ogawa 積分 (φ-積分): $\int_T f\, d_\varphi B$

$$\int_T f(t)\, d_\varphi B_t := \sum_{m=1}^{\infty} \int_T f(t)\overline{\varphi_m(t)}\, dt \int_0^1 \varphi_m(t)\, dB_t \text{ in prob.}$$

1-3 : Ogawa 積分

定義 4 (Ogawa 積分)

· $f \in L^0(\Omega; L^2([0,1];\mathbb{C}))$, $T \in \mathcal{L}([0,1])$.

· $\varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1];\mathbb{K})$ の (orderd) CONS.

- φ に関する Ogawa 積分 (φ-積分): $\int_T f\, d_{\varphi} B$

$$\int_T f(t)\, d_{\varphi} B_t := \sum_{m=1}^{\infty} \int_T f(t) \overline{\varphi_m(t)}\, dt \int_0^1 \varphi_m(t)\, dB_t \text{ in prob.}$$

- $\mathbb{K}$ で universal な Ogawa 積分 (u-積分): $\int_T f\, d_{\mathrm{u}} B$

$$\int_T f(t)\, d_{\mathrm{u}} B_t := \int_T f(t)\, d_{\varphi} B_t$$, 右辺が φ に依存しないとき.

1-3：Ogawa 積分可能性

$$\mathcal{A} = \{A \in L^0([0,1]\times\Omega) \mid \mathrm{Re}\,A, \mathrm{Im}\,A \text{ は 有界変動 a.s. }\},$$
$$\mathcal{M} = \left\{ \int_0^{\cdot} g\,dB \,\middle|\, g \in L^0(\Omega; L^2[0,1]),\ g \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測} \right\}$$

1-3：Ogawa 積分可能性

$$\mathcal{A} = \{A \in L^0([0,1] \times \Omega) \,|\, \mathrm{Re}\, A, \mathrm{Im}\, A \text{ は 有界変動 a.s. }\},$$
$$\mathcal{M} = \left\{ \int_0^{\cdot} g\, dB \,\middle|\, g \in L^0(\Omega; L^2[0,1]),\ g \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測} \right\}$$

- $\mathbb{R}$ で u-可積分な乱関数

  ・$f \in \mathcal{A} \implies \int_0^t f(s)\, d_{\mathrm{u}} B_s = f(t-)B_t - \int_{(0,t)} B_s\, df(s)$

  ・$e \in L^2[0,1],\ W_t(e) := \int_0^t e\, dB$ (連続 a.s.) $\implies$
  $\int_0^t f(s)e(s)\, d_{\mathrm{u}} B_s = f(t-)W_t(e) - \int_{(0,t)} W_s(e)\, df(s)$

1-3：Ogawa 積分可能性

$$\mathcal{A} = \{A \in L^0([0,1] \times \Omega) \mid \mathrm{Re}\, A, \mathrm{Im}\, A \text{ は 有界変動 a.s. }\},$$
$$\mathcal{M} = \left\{ \int_0^{\cdot} g\, dB \,\middle|\, g \in L^0(\Omega; L^2[0,1]),\ g \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測} \right\}$$

- $\mathbb{R}$ で u-可積分な乱関数
  - ・$f \in \mathcal{A} \implies \int_0^t f(s)\, d_{\mathrm{u}} B_s = f(t-)B_t - \int_{(0,t)} B_s\, df(s)$
  - ・$e \in L^2[0,1],\ W_t(e) := \int_0^t e\, dB$ (連続 a.s.) $\implies$ $\int_0^t f(s)e(s)\, d_{\mathrm{u}} B_s = f(t-)W_t(e) - \int_{(0,t)} W_s(e)\, df(s)$
- $\mathbb{R}$ で u-可積分でない乱関数
  - ・$f(t) = B_{1-t}$ (三角関数系の順序による)

1-3：Ogawa 積分可能性

$\mathcal{A} = \{A \in L^0([0,1] \times \Omega) \mid \mathrm{Re}\,A, \mathrm{Im}\,A$ は 有界変動 a.s. $\}$,
$\mathcal{M} = \left\{ \int_0^{\cdot} g\,dB \,\middle|\, g \in L^0(\Omega; L^2[0,1]),\ g \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測} \right\}$

- $\mathbb{R}$ で u-可積分な乱関数
  - $f \in \mathcal{A} \implies \int_0^t f(s)\,d_{\mathrm{u}}B_s = f(t-)B_t - \int_{(0,t)} B_s\,df(s)$
  - $e \in L^2[0,1],\ W_t(e) := \int_0^t e\,dB$ (連続 a.s.) $\implies$
    $\int_0^t f(s)e(s)\,d_{\mathrm{u}}B_s = f(t-)W_t(e) - \int_{(0,t)} W_s(e)\,df(s)$
- $\mathbb{R}$ で u-可積分でない乱関数
  - $f(t) = B_{1-t}$ (三角関数系の順序による)
- $\mathbb{R}$ で u-可積分であるが, $\mathbb{C}$ で u-可積分でない乱関数
  - $f(t) = B_t \implies \int_0^t f(s)\,d_{\mathrm{u}}B_s = \frac{1}{2}B_t^2$ in $\mathbb{R}$
    ($\mathbb{C}$ では三角関数系の順序による)

1-3：Ogawa 積分可能性

- $\mathbb{C}$ で u-可積分な乱関数

  ・$f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$, $K \in L^2([0,1]^2)$
  $F(t) = T_K f(t) := \int_0^1 K(t,s) f(s)\, ds$

  $\Longrightarrow$

$$\int_0^1 F(t)\, d_{\mathrm{u}} B_t = \int_0^1 F(t)\, \delta B_t + \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) D_t f(s)\, ds\, dt$$

1-3：Ogawa 積分可能性

CONS の正則性

$\varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の CONS

φ が正則 $\underset{def}{\Leftrightarrow} \sup_{M\in\mathbb{N}} \left| \sum_{m=1}^{M} \varphi_m \widetilde{\varphi}_m \right|_{L^2[0,1]} < \infty \ \left(\widetilde{\varphi}_m(t) = \int_0^t \varphi_m(s)\,ds \right)$

注) 三角関数系, Haar 関数系は正則

1-3：Ogawa 積分可能性

CONS の正則性

$\varphi = (\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の CONS

φ が正則 $\underset{def}{\Leftrightarrow} \sup_{M\in\mathbb{N}} \left| \sum_{m=1}^{M} \varphi_m \widetilde{\varphi}_m \right|_{L^2[0,1]} < \infty \ \left(\widetilde{\varphi}_m(t) = \int_0^t \varphi_m(s)\,ds \right)$

注) 三角関数系, Haar 関数系は正則

- 正則 CONS φ に関して可積分な乱関数
  - ・quasi-martingale i.e. $\mathcal{A} + \mathcal{M}$ の要素

定理 (Ogawa[1](1985))

$\varphi : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の CONS

1) 任意の quasi-martingale f が φ-可積分 $\Leftrightarrow$ φ が正則

2) 1) のとき, quasi-martingale $f = A + M$ $(A \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{M})$ は φ-可積分で, $\int_0^t f(s)\,d_\varphi B_s = \int_0^t A(s)\,d_u B_s + \int_0^t M(s) \circ dB_s$

1-3 : Skorokhod-type Itô 過程等の Ogawa 積分

定理 (H.,Kazumi[7,8](2017))

$\varphi : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の正則 CONS
$e : [0,1] \to \mathbb{R}$; 有界変動

$$X_t = \int_0^t f(s)\,\delta B_s + \int_0^1 K(t,s)g(s)\,ds + X_0 \;, t \in [0,1],$$

$$f \in \mathcal{L}_1^{2,2}, g \in \mathcal{L}_1^{1,2}, X_0 \in \mathcal{L}_0^{1,2}, K \in L^2([0,1]^2).$$

$$\Longrightarrow$$

eX は φ-可積分で，その φ-積分は

$$\int_0^1 e(t)X_t\,\delta B_t + \frac{1}{2}\int_0^1 e(t)f(t)\,dt + \int_0^1 e(t)\left(\int_0^t D_t\,\delta X_s + D_t X_0\right)dt$$

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ： $L^2[0,1] = L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ： $L^2[0,1] = L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

- 通常の解析

  $a \in L^2[0,1]$ は Fourier 係数 $\langle e_n, a\rangle = \int_0^1 \overline{e_n(t)}a(t)\,dt$

  で $a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a\rangle e_n$ と特定される.

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ： $L^2[0,1] = L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

- 通常の解析

  $a \in L^2[0,1]$ は Fourier 係数 $\langle e_n, a\rangle = \int_0^1 \overline{e_n(t)}a(t)\,dt$

  で $a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, a\rangle e_n$ と特定される.

- 確率解析

  $[0,1]$ 上の乱関数 a の確率 Fourier 係数 (SFC) $\cdots$

$$(e_n\,,\, a\,d_*B) := \int_0^1 \overline{e_n(t)}a(t,\omega)\,d_*B_t$$

注）$\int d_*B_t$ は何らかの非因果的確率積分

問題：a は SFC $(e_n\,,\, a\,d_*B)$ で (どのように) 特定されるか？

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

<u>問題設定</u>

$[0,1]$ 上の乱関数 a, b による確率微分

$d_* X_t = a(t,\omega)\, d_* B_t + b(t,\omega)\, dt$ の確率 Fourier 係数 (SFC) $\cdots$

$$
\begin{aligned}
(e_n\,,\, d_* X) &:= \int_0^1 \overline{e_n(t)}\, d_* X_t \\
&= \int_0^1 \overline{e_n(t)} a(t,\omega)\, d_* B_t + \int_0^1 \overline{e_n(t)} b(t,\omega)\, dt \\
&= (e_n\,, a\, d_* B) + \langle e_n\,, b \rangle
\end{aligned}
$$

問題：a, b は SFC $(e_n\,,\, d_* X)$ で (どのように) 特定されるか？

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

注１）

SFC-I　: $d_* B_t = dB_t$ (Itô 型)
SFC-S　: $d_* B_t = \delta B_t$ (Skorokhod 型)
SFC-O$_{\mathrm{u}}$　: $d_* B_t = d_{\mathrm{u}} B_t$ (u-Ogawa 型)
SFC-O$_{\varphi}$　: $d_* B_t = d_{\varphi} B_t$ (φ-Ogawa 型)

注２）”乱関数の「特定」” の意味

- 広義の同定

  SFC を定めている $(B_t)_{t\in[0,\infty)}$ の値を用いて特定される.

- 狭義の同定

  SFC を定めている $(B_t)_{t\in[0,\infty)}$ の値を用いずに特定される.

1-4：確率 Fourier 係数 (SFC) と問題設定

注 3）確率微分の SFC の定義式:

$$(e_n\,, d_* X) = (e_n\,, a\, d_* B) + \langle e_n\,, b \rangle$$

より, SFC から a が同定されれば b も (広義に) 同定されるので, a の同定について考える.

1-5：先行研究 (概要)

- SFC-I での同定
  - 広義の同定

    [3](Ogawa): 因果的関数は同定される.
  - 狭義の同定

    [4](Ogawa): Hölder 連続性等を満たす非負値因果的関数
- SFC-S での同定
  - 広義の同定

    [5](Ogawa,Uemura): $\mathcal{L}_1^{2,2}$ の Wiener 汎関数 (drift 項は class $\mathcal{L}_1^{1,2}$)

    [12](H., Kazumi): Wiener 汎関数は同定される ([3,5] の拡張).

    [11](H.): 距離化可能 Haar 測度空間の atomless, σ-finite な Borel 集合上の Wiener 汎関数 ([12] の拡張)
  - 狭義の同定

    [8](H.): 非負値絶対連続 Wiener 汎関数

1-5：先行研究 (概要)

- SFC-O での同定
  - 広義の同定

    [12](H., Kazumi): Skorokhod 積分過程

    [8](H.): 有界変動乱関数, Skorokhod-type Itô 過程等 ([12] の拡張)

    [10](Ogawa,Uemura): 適当な条件を満たす複素数値乱関数 $(*)$
  - 狭義の同定

    [6](Ogawa,Uemura): 絶対連続性等を満たす非負値乱関数

    [8](H.): 非負値有界変動乱関数 ([6] の拡張)

    [9](Ogawa,Uemura): $(*)$ は符号を除いて同定される.

1-5：本研究 (概要)

- SFC-O での同定
  - 同定可能性 I, II

  $\Longrightarrow$

  - 広義の同定

    正則 CONS に関して Ogawa 可積分な乱関数 (quasi-martingale と Skorokhod 積分過程と Hilbert-Schmidt 積分表現 Wiener 汎関数の和) は同定される.

  - 狭義の同定

    上記の乱関数は符号を除いて同定される.

[8](H.):

- 広義: 有界変動乱関数, Skorokhod-type Itô 過程 ([12] の拡張)
- 狭義: 非負値有界変動乱関数 ([6] の拡張)

の拡張となる.

2-1：先行結果 / SFC-O_{u} での同定

定理 (H.[8](2017))

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

$a \in \mathcal{A}$

$b \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ a.s.

$d_{\mathrm{u}} Y_t := a(t)\, d_{\mathrm{u}} B_t + b(t)\, dt$

$\Longrightarrow$

(1) $|a|$ は狭義に $((e_n\,,\, d_{\mathrm{u}} Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

(2) a は広義に $((e_n\,,\, d_{\mathrm{u}} Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

注) 任意有限個の $(e_n\,,\, d_{\mathrm{u}} Y)$ が欠落していても同定される.

手続き: $((e_n\,,\, d_{\mathrm{u}} Y))_n \Longrightarrow (Y_t)_{t\in[0,L]} \Longrightarrow |a| \Longrightarrow a$

Parseval-type SFT　　重複対数の法則

2-1：先行結果 / SFC-O$_\varphi$ での同定

$$\mathcal{W} = \left\{ \int_0^{\cdot} g\,\delta B \,\middle|\, g \in \mathcal{L}_1^{2,2} \right\} + \\ \operatorname{span}\left\{ T_K g \,\middle|\, g \in \mathcal{L}_1^{1,2},\ \sup_{t\in[0,1]} |K(t,\cdot)|_{L^2[0,1]} < \infty \right\}$$

定理 (H.,Kazumi[12,8](2017))

$\varphi : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の正則 CONS

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$：有界変動関数からなる $L^2[0,1]$ の CONS

$a \in \mathcal{W}$, $b \in \mathcal{L}_1^{0,2}$

$\Longrightarrow$

a は広義に $d_\varphi Y_t = a(t)\, d_\varphi B_t + b(t)\, dt$ の SFC-O$_\varphi$ の系

$((e_n\,, d_\varphi Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

2-1：先行結果 / SFC-O$_\psi$ での同定

定理 (Ogawa,Uemura[10](2017))

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\chi_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

$a : [0,1]\times\Omega \to \mathbb{C}$; 乱関数

以下を仮定:

(1) $\exists(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$: 正数列 $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k < \infty$, $E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle\chi_k, a\rangle^2_{L^2[0,1]}\right) < \infty$.

(2) $\sup_{k\in\mathbb{N},t\in[0,1]} |\chi_k(t)| < \infty$.

(3) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ e_n\psi_m \in L^2[0,1]$.

$\Longrightarrow$

$a, (\mathrm{sgn}\, a)a$ はそれぞれ広義, 狭義に $((e_n, a\, d_\psi B))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

注 1) 任意有限個の $(e_n, a\, d_\psi B)$ が欠落していても同定される.

注 2) Parseval-type SFT, cross variation の式により同定される.

2-2：本研究 / φ(正則)-可積分な乱関数の SFC-O$_\varphi$ による同定可能性

$\varphi : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の正則 CONS

$$\mathcal{W} = \left\{ \int_0^{\cdot} f\,\delta B \,\middle|\, f \in \mathcal{L}_1^{2,2} \right\} + \operatorname{span}\left\{ T_K f \,\middle|\, f \in \mathcal{L}_1^{1,2},\ \sup_{t\in[0,1]} |K(t,\cdot)|_{L^2[0,1]} < \infty \right\}$$

$\mathscr{L} = \mathcal{A} + \mathcal{M} + \mathcal{W}$ $\cdots$ φ-可積分な乱関数の族

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}} : L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS; 各 $\mathrm{Re}\, e_n$, $\mathrm{Im}\, e_n$ は有界変動

注) $a \in \mathscr{L}$ の SFC-O$_\varphi$ $(e_n, a\, d_\varphi B) = \int_0^1 e_n a\, d_\varphi B$ は well-defined となる.

2-2：主結果 / 同定可能性 I ([8] の延長)

まず, 以下を得た. h を $\mathscr{L}$ の上の写像とする.

定理 1

$a \in \mathscr{L} = \mathcal{A} + \mathcal{M} + \mathcal{W}$

0 に L^2-収束する任意の有界変動関数列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n a \, d_\varphi B = 0$ in prob. 特に,

$$\left(\int_0^t a \, d_\varphi B = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e_n(s) \, ds \, (e_n, a \, d_\varphi B) \quad \text{in prob.} \right) \forall t \in [0,1].$$

これより, $[0,1]$ の稠密部分集合 S に対し, 以下は同値:

(i) $h(a)$ は $((e_n, a \, d_\varphi B))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

(ii) $h(a)$ は $(\int_0^t a \, d_\varphi B))_{t\in S}$ で同定される.

2-2：同定可能性 I / 証明について

前半について:

・$a \in \mathcal{A}$ のとき: [8]から分かる (Itô-Nisio の定理, Doob の L^2-不等式).

[再掲] 先行結果 / SFC-$\mathrm{O_u}$ での同定

定理 (H.[8](2017))

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $L^2([0,1];\mathbb{C})$ の CONS

$a \in \mathcal{A}$

$b \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ a.s.

$d_{\mathrm{u}}Y_t := a(t)\, d_{\mathrm{u}}B_t + b(t)\, dt$

$\Longrightarrow$

(1) $|a|$ は狭義に $((e_n\,, d_{\mathrm{u}}Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

(2) a は広義に $((e_n\,, d_{\mathrm{u}}Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

注) 任意有限個の $(e_n\,, d_{\mathrm{u}}Y)$ が欠落していても $|a|, a$ は同定される.

手続き: $((e_n\,, d_{\mathrm{u}}Y))_n \Longrightarrow (Y_t)_{t\in[0,L]} \Longrightarrow |a| \Longrightarrow a$

Parseval-type SFT　　重複対数の法則

2-2 : 同定可能性 I / 証明について

前半について:

・$a \in \mathcal{A}$ のとき: [8]で得ている (Itô-Nisio の定理, Doob の L^2-不等式).

2-2：同定可能性 I / 証明について

前半について:

・$a \in \mathcal{A}$ のとき: [8]で得ている (Itô-Nisio の定理, Doob の L^2-不等式).

・$a = \int_0^{\cdot} g\, dB \in \mathcal{M}$ のとき：Itô の公式より $v_n a$ は semi-martingale で,
$v_n(t)a(t) = \int_0^t a(s)\, dv_n(s) + \int_0^t v_n(s)g(s)\, dB_s$

定理 (Ogawa[1](1985))

$\varphi : L^2([0,1]\,;\mathbb{R})$ の CONS

1) 任意の quasi-martingale f が φ-可積分 $\Leftrightarrow$ φ が正則

2) 1) のとき, quasi-martingale $f = A + M$ $(A \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{M})$ は φ-可積分で, $\int_0^t f(s)\, d_\varphi B_s = \int_0^t A(s)\, d_u B_s + \int_0^t M(s) \circ dB_s$

より, $\int_0^1 v_n a\, d_\varphi B = \int_0^1 v_n a\, dB + \frac{1}{2}\int_0^1 v_n g\, d\lambda$.

2-2：同定可能性 I / 証明について

a の path は有界 a.s. なので，$\lim_{n\to\infty} |v_n a|_{L^2[0,1]} = 0$ a.s.

従って，$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n a \, d_\varphi B = 0$ in prob.

- $a = \int_0^{\cdot} g \, \delta B + T_K h \in \mathcal{W}$ のとき：定理 [7,8] を適用し，

Wiener chaos 展開を用いることで $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n a \, \delta B = 0$ in $L^2(\Omega)$

が分かる． □

[再掲] Skorokhod-type Itô 過程等の Ogawa 積分

定理 (H.,Kazumi[7,8](2017))

$\varphi : L^2([0,1];\mathbb{R})$ の正則 CONS
$e : [0,1] \to \mathbb{R}$; 有界変動

$$X_t = \int_0^t f(s)\,\delta B_s + \int_0^1 K(t,s)g(s)\,ds + X_0 \ , t \in [0,1],$$

$f \in \mathcal{L}_1^{2,2}, g \in \mathcal{L}_1^{1,2}, X_0 \in \mathcal{L}_0^{1,2}, K \in L^2([0,1]^2).$

$\Longrightarrow$

eX は φ-可積分で，その φ-積分は

$$\int_0^1 e(t)X_t\,\delta B_t + \frac{1}{2}\int_0^1 e(t)f(t)\,dt + \int_0^1 e(t)\Big(\int_0^t D_t\,\delta X_s + D_t X_0\Big)\,dt$$

2-2：同定可能性 I / 証明について

a の path は有界 a.s. なので，$\lim_{n\to\infty} |v_n a|_{L^2[0,1]} = 0$ in. prob.

従って，$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n a \, d_\varphi B = 0$ in prob.

・$a = \int_0^\cdot g \, \delta B + T_K h \in \mathcal{W}$ のとき：定理 [7,8] を適用し，

Wiener chaos 展開を用いることで $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 v_n a \, \delta B = 0$ in $L^2(\Omega)$

が分かる． $\square$

2-3：副問題 / 乱関数の φ-積分過程による同定

a : 乱関数

副問題：a は $\left(\int_0^t a\, d_\varphi B\right)\big)_{t\in[0,1]}$ で特定されるか？

2-3：副問題 / 乱関数の φ-積分過程による同定

a : 乱関数

副問題：a は $\left(\int_0^t a\, d_\varphi B\right)_{t\in[0,1]}$ で特定されるか？

- $a \in \mathcal{M}$ のときは, 特定される.

  ・広義の同定

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left\langle \int_0^{\cdot} a\, d_\varphi B,\, B \right\rangle_t$$

  ・狭義の同定

$$|a|(t) = \left(\frac{d}{dt}\left[\int_0^{\cdot} a\, d_\varphi B \right]_t \right)^{\frac{1}{2}}$$

2-3：副問題 / 乱関数の quadratic variation

定理 2 (D.Nualart, E.Pardoux[2](1988))

$f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ に対し,

$$\left[\int_0^{\cdot} f \, \delta B \right]_t = \int_0^t |f(s)|^2 \, ds, \ \forall t \in [0,1].$$

注) $a \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ が $\sup_{t \in [0,1]} |a(t)|_{\mathcal{L}_0^{1,2}} < \infty$ を満たすとき, $a, (\operatorname{sgn} a)a$ はそれぞれ広義, 狭義に SFC-S で同定される.

命題 1

任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$\left[\int_0^{\cdot} A \, d_{\mathrm{u}} B \right]_t = \int_0^t |A(s)|^2 \, ds, \ \forall t \in [0,1].$$

2-3：副問題 / 乱関数の quadratic variation

Brown 運動 $(B_t)_{t\in[0,1]}$ の独立増分性と
$E|B_t - B_s|^2 = (t-s)$, $E|B_t - B_s|^4 = 3(t-s)^2$ より，次が出る．

補題 1

$X \in L^0(\Omega; L^\infty[0,1])$, $t \in (0,1]$, $\Pi[0,t]$: $[0,t]$ の分割全体

$$T_X(\Delta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} X\, d\lambda\, (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2,\ \Delta = (t_0, ..., t_n) \in \Pi[0,t]$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{|\Delta|\to 0} T_X(\Delta) = \int_0^t X\, d\lambda \ \text{ in prob.}$$

注) [2](D. Nualart, E. Pardoux(1988)) において補題として，より一般の $X \in L^0(\Omega; L^p[0,1])$, $p \in (1,\infty)$ に対して同様のことが示されている．

2-3：同定可能性 II

$$\mathscr{L}_{IPC}^{e,\varphi} = \Bigg\{ a \in L^0([0,1]\times\Omega) \;\Bigg|\; \left(\int_0^t a\, d_\varphi B = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e_n(s)\, ds\, (e_n,\, a\, d_\varphi B) \text{ in prob. }, \right.$$
$$\int_0^t |a|^2\, d\lambda = \left[\int_0^{\cdot} a\, d_\varphi B \right]_t$$
$$\left. \int_0^{t\wedge s} a\, d\lambda = \left\langle \int_0^{\cdot} a\, d_\varphi B,\, B_{\cdot\wedge s} \right\rangle_t \right) \forall s,t \in [0,1] \Bigg\}$$

定理 1, 定理 2 (D.Nualart, E.Pardoux), 命題 1 より次を得る.

系 1

$\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{W} \subset \mathscr{L}_{IPC}^{e,\varphi}$

- $\mathcal{A} + \mathcal{M} + \mathcal{W} \subset \mathscr{L}_{IPC}^{e,\varphi}$ ？
- $a \in \mathscr{L}_{IPC}^{e,\varphi}$ は符号を除いて狭義に $((e_n, a\, d_\varphi B))_{n\in\mathbb{N}}$ で特定されるか？

2-3：主結果 / 同定可能性 II

定理 3

$\mathscr{L}^{e,\varphi}_{IPC}$ は $L^0([0,1]\times\Omega)$ の部分空間.

系 2

a : 乱関数; $\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a \in \mathscr{L}^{e,\varphi}_{IPC}$, $b \in L^0(\Omega, L^2[0,1])$,
$d_\varphi Y_t := a(t)\, d_\varphi B_t + b(t)\, dt$.

(1) a は広義に $((e_n, d_\varphi Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.

(2) $|\mathrm{Re}\, a|$, $|\mathrm{Im}\, a|$, $\mathrm{Re}\, a\, \mathrm{Im}\, a$, $(\mathrm{sgn}\, a)a$ は狭義に $((e_n, d_\varphi Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で $\forall f, g \in \mathscr{L}^{e,\varphi}_{IPC}$ $\int_0^t f\bar{g}\, d\lambda = \left\langle \int_0^\cdot f\, d_\varphi B, \int_0^\cdot g\, d_\varphi B \right\rangle_t$ を用いて同定される.

注) 任意有限個の $(e_n, d_\varphi Y)$ が欠落していても同定される.

系 3

$\mathscr{L} = \mathcal{A} + \mathcal{M} + \mathcal{W} \subset \mathscr{L}^{e,\varphi}_{IPC}$

2-3：quadratic variation process の和に関する閉性

定理 4

$$Q_c = \left\{ X : [0,1] \to L^0(\Omega) \,\middle|\, \exists x \in L^0(\Omega; L^2[0,1]) \right.$$
$$\left. \forall s,t \in [0,1]\ [X]_t = \int_0^t |x|^2\, d\lambda,\ \langle X, B_{\cdot\wedge s}\rangle_t = \int_0^{t\wedge s} x\, d\lambda \right\}$$

は $L^0(\Omega)^{[0,1]}$ の部分空間

証明の概略: $X, Y \in Q_c$ とする. $[X+Y]_t = \int_0^t |x+y|^2\, d\lambda$ を示す.

$F_t \in \mathcal{D} = \left\{ \sum_{j=1}^n r_j B_{t\wedge t_j} 1_{A_j} \,\middle|\, r_j \in \mathbb{C}, t_j \in [0,1], A_j \in \mathcal{F} \right\} \subset Q_c$ に対し

$[\alpha X + \beta F]_t = \int_0^t |\alpha x + \beta f|^2\, d\lambda,\ f = \sum_{j=1}^n r_j 1_{[0,t_j]} \otimes 1_{A_j}$.

Y を $\mathcal{D}$ の元 $\tilde{Y}$ で近似する.

$\Delta X = X_t - X_s,\ \Delta = (s,t)$ と表すとき，

$$(\Delta X + \Delta\tilde{Y})^2 - (\Delta X + \Delta Y)^2 = (\Delta\tilde{Y} - \Delta Y)^2 + 2(\Delta\tilde{Y} - \Delta Y)(\Delta X + \Delta Y)$$

より，

$$\begin{aligned} &\left| \sum(\Delta X + \Delta\tilde{Y})^2 - \sum(\Delta X + \Delta Y)^2 \right| \\ &\leq \underset{\sim\sim\sim}{\sum(\Delta\tilde{Y} - \Delta Y)^2} + 2\Big(\underset{\sim\sim\sim}{\sum(\Delta\tilde{Y} - \Delta Y)^2} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum(\Delta X + \Delta Y)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であり，

$[X + \tilde{Y}]_t \xrightarrow[\tilde{y}\to y]{} \int_0^t |x + y|^2\, d\lambda,\ [\tilde{Y} - Y]_t \xrightarrow[\tilde{y}\to y]{} 0$ だから，

$[X + Y]_t = \int_0^t |x + y|^2\, d\lambda$ を得る． $\square$

参考文献

[1] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240 (1985)

[2] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Th. Rel. Fields , 78, pp.535-581 (1988)

[3] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation. An International Journal of Probability and Stochastic Processes. Vol. 85. **2**, 286-294 (2013)

[4] S. Ogawa, A direct inversion formula for SFT. The Indian Journal of Statistics Vol. 77-A. **1**, 30-45 (2014)

参考文献

[5] S. Ogawa, H. Uemura, Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier cofficients. Bull. Sci. Math. **138**, 147-163 (2014)

[6] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. RIMS Kôkyûroku. **1952**, 128-134 (2015)

[7] K. Hoshino, T. Kazumi, On the integrability of Ogawa integrals of noncausal Wiener functionals, preprint (2017)

[8] K. Hoshino, Identification of finite variation processes from the SFC. MSJ Autumn Meeting, abstract (2017)

参考文献

[9] S. Ogawa, H. Uemura, On the reconstruction of random function from its SFCs defined by an arbitrary CONS. MSJ Autumn Meeting, abstract (2017)

[10] S. Ogawa, H. Uemura, On the reconstruction of random function from its SFCs defined by an arbitrary CONS. Symposium on Probability Theory, abstract (2017)

[11] K. Hoshino, On the reconstruction formulas in the wide sense of Wiener functionals from the SFCs. MSJ Spring Meeting, abstract (2018)

[12] K. Hoshino, T. Kazumi, On the identification of noncausal Wiener functionals from the stochastic Fourier coefficients, to appear (2018)