

頂点強化ランダムウォークの 局在化の条件について

横浜国立大学大学院工学府 石川 智啓

2018/08/23

発表の流れ

- 1 研究背景・動機
 - Random Walk の紹介
 - Vertex Reinforced Random Walk の紹介
- 2 動点が単数の場合における VRRW
 - Cotar and Thacker [3] の先行結果
 - 今発表の主結果 1
- 3 動点が複数の場合における VRRW
 - Launay [4] の先行結果
 - 今発表の主結果 2

Random Walk とは?

動点が時刻 1 毎に連結なグラフ $G = (V, E)$ 上を移動する離散時間のモデルである。頂点に「重み」という概念をつけ、動点の移動する確率を、頂点の重みの割合によって決めるとする。

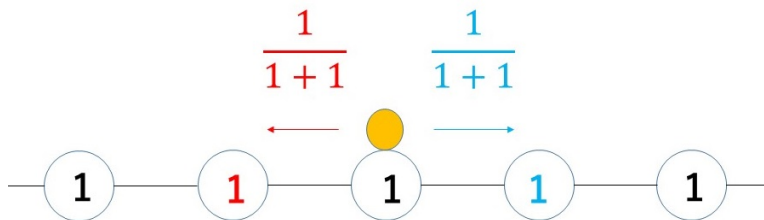


Figure: \mathbb{Z} 上での Random Walk の例 1

(上図の白丸内の数字が頂点の重み)

各頂点の重みが違う場合の Random Walk

また、以下のように各頂点毎に異なる重みを与えることで、動点の移動する確率を非一様にする事が可能。

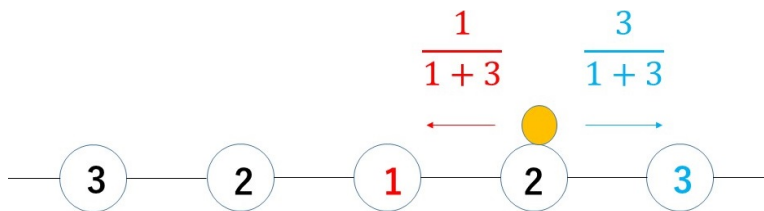


Figure: \mathbb{Z} 上での Random Walk の例 2

(上図の白丸内の数字が頂点の重み)

Random Walk の性質

通常の Random Walk の場合、動点は長い間移動を繰り返すと、

- 全ての頂点を無限回通る (Recurrent)
- 全ての頂点を有限回通る (Transient)

のどちらかが確率 1 で起こることが知られている。

Recurrent になる確率が 1 の Random Walk の例

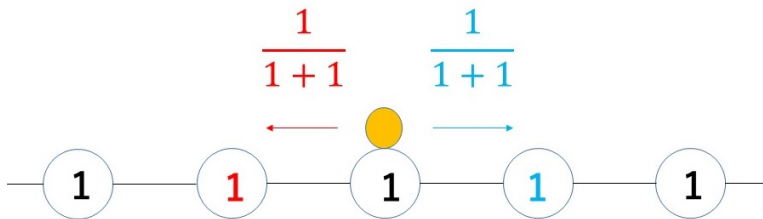


Figure: 全ての頂点の重みが 1 の Random Walk

Transient になる確率が 1 の Random Walk の例

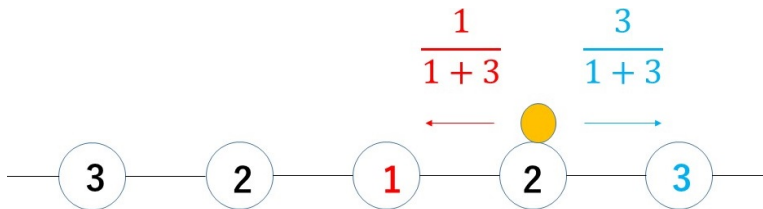


Figure: 外に向う重みが大きい Random Walk

Vertex Reinforced Random Walk(VRRW) の定義

VRRW は Pemantle [1] が学位論文において有限グラフの場合の研究を行ったのが始まりである。

ある頂点を訪問した回数に応じて、

その頂点の重みを増やす Random Walk の事。

時間が経過するごとに頂点の重みが変わるという点が、

VRRW の性質である。

Vertex Reinforced Random Walk(VRRW) の挙動例

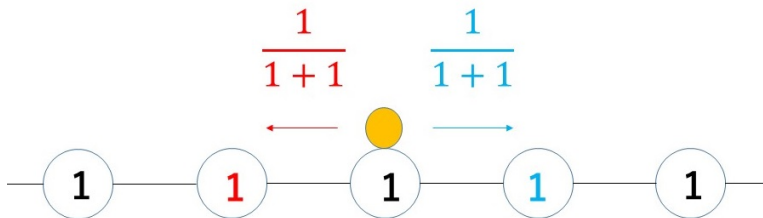


Figure: $t=0$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

Vertex Reinforced Random Walk(VRRW) の挙動例

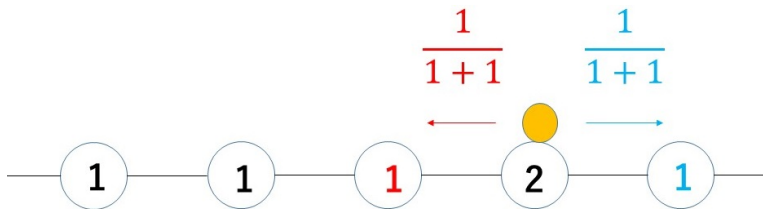
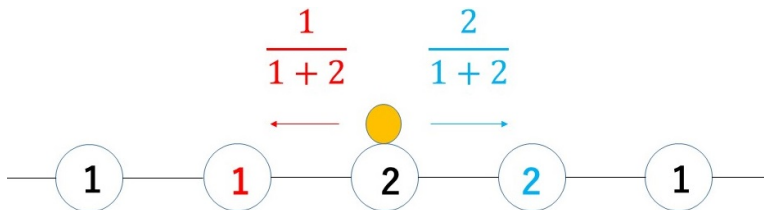


Figure: t=1

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

Vertex Reinforced Random Walk(VRRW) の挙動例

Figure: $t=2$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

動点の位置が $t=0$ と同じだが、移動する確率は変わっている

VRRW の特徴

局在化

グラフの一部のみ無限回通る事を局在化という。

局在化の例 Tarrès [2]

L_k^v := 動点が時刻 k までに v を訪問した回数

w_v := 頂点 v の重み関数 ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$)

$g_\infty := \{v \in V : \sup_k L_k^v = \infty\}$ とする。

\mathbb{Z} 上では、 $w_v(x) = x + 1 \Rightarrow P(|g_\infty| = 5) = 1$

記号の定義

- X_k := 動点が k 回動いた時の居場所
- L_k^v := 動点が時刻 k までに v を訪問した回数
($L_k^v = \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\{X_i=v\}}$)
- w_v := 頂点 v の重み関数 ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$)
- $g_\infty := \{v \in V : \sup_k L_k^v = \infty\}$
- $N_v := \{v, v'\} \in E$ となる頂点 v' の集合
- $\mathcal{F}_k := \{X_0, X_1, \dots, X_k\}$ から生成される σ 加法族

この時、動点の推移確率を

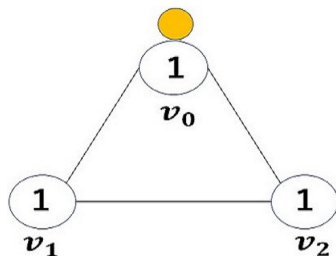
$$P(X_{k+1} = v' | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{\{X_k=v\}} = \frac{w_{v'}(L_k^{v'})}{\sum_{u \in N_v} w_u(L_k^u)} \mathbf{1}_{\{v' \in N_v\}}$$

と表す。

局在化の例

局在化

グラフの一部のみ無限回通る事を局在化という。



上図にて、 $w_v(k) = 2^k$ の時、 v_0 と v_1 のみ通る確率を見つめる。

局在化の例

局在化

グラフの一部のみ無限回通る事を局在化という。

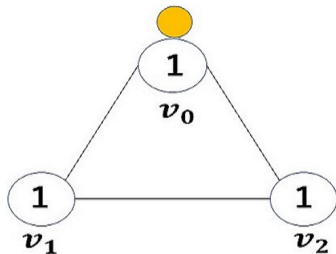
$$\begin{aligned}
 P(|g_\infty| = 2) &\geq P(\forall n \geq 0, X_n \in \{v_0, v_1\}) \\
 &= \prod_{k \geq 0} \left(\frac{2^k}{2^k + 1} \right)^2 = \prod_{k \geq 0} \left(\frac{2^k + 1}{2^k} \right)^{-2} = \prod_{k \geq 0} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right)^{-2} \\
 &\geq \prod_{k \geq 0} \exp\left(-\frac{2}{2^k}\right) = \exp\left(-\sum_{k \geq 0} \frac{2}{2^k}\right) > 0
 \end{aligned}$$

(後半の式変形は、 $e^x \geq 1 + x$, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} < \infty$ より。)

2点への局在化の先行研究

Cotar and Thacker [3] は、次数が有界なグラフにおける2点への局在化の問題を研究した。

(実は下図の例では $P(|g_\infty| = 2) = 1$)



Cotar and Thacker [3] の先行結果

定理 1.1 G が次数が有界なグラフならば、

$$\sup_{v \in V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{w_v(i)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1 \quad (\text{ex. } w(i) = i^{2+\epsilon})$$

定理 1.2 G が次数が有界で三角形を持たないならば、

$$\sup_{v \in V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^{\frac{1}{2}}}{w_v(i)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1 \quad (\text{ex. } w(i) = i^{1.5+\epsilon})$$

定理 1.3 G が星グラフ (直径が 2 以下でサイクルを持たないグラフ) ならば、

$$\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{w_v(i)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1 \quad (\text{ex. } w(i) = i^{1+\epsilon})$$

Cotar and Thacker [3] の証明のアイデア

$|G| = n$ とする。(有限グラフで証明できれば、無限グラフに拡張できるため)

動点が k 回移動した時、頂点毎の通った回数を降順に R_k^1, \dots, R_k^n とする。

この時、 $R_\infty^3 < \infty$ a.s. \iff 2点へ局在化する確率が1。

Cotar and Thacker [3] の証明のアイデア

R_∞^3 を評価するためには、 (R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数が重要。

(R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数

一般のグラフ $>$ 三角形を持たないグラフ $>$ 星グラフ

(R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数に関する補足

G の頂点数が 3 の時、 $k = 100$, $R_k^3 = 20$ の場合の (R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数は、 G が非三角形の場合 1 通りである。

$$\{(R_k^1, R_k^2) = (50, 30)\}$$



Figure: G が非三角形の場合の R_k の組み合わせ例

(R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数に関する補足

G の頂点数が 3 の時、 $k = 100$, $R_k^3 = 20$ の場合の (R_k^1, R_k^2) の組み合わせの数は、 G が三角形の場合 21 通りある。

$\{(R_k^1, R_k^2) = (40, 40) \sim (60, 20)\}$

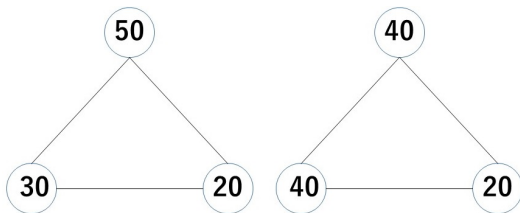


Figure: G が三角形の場合の R_k の組み合わせ例

今発表の主結果 1

定理 2 G が完全 2 部グラフならば、

$$\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{w_v(i)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1$$

(比較) 定理 1.3 G が星グラフならば、

$$\max_{v \in V} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{w_v(i)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1$$

VRRW では完全 2 部グラフが星グラフと同様の計算が行えるため、このような拡張が行えた。(また、完全 2 部グラフにおける $|g_{\infty}|$ が 2 でない場合の w の条件も解析した)

星グラフ上における VRRW の挙動

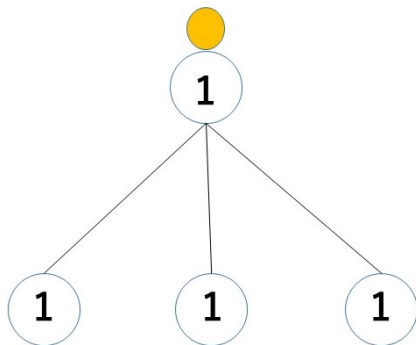


Figure: $t=0$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

星グラフ上における VRRW の挙動

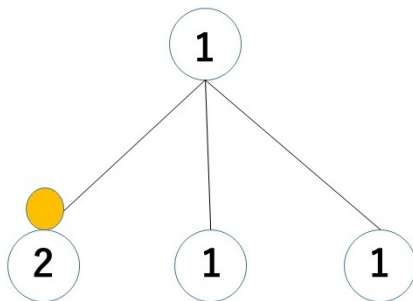


Figure: $t=1$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

星グラフ上では、偶数回目に移動できる場所は上しかない

星グラフ上における VRRW の挙動

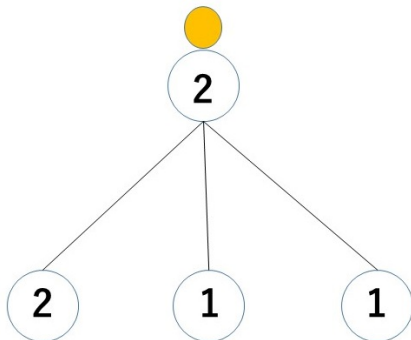


Figure: $t=2$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

完全 2 部グラフ上における VRRW の挙動

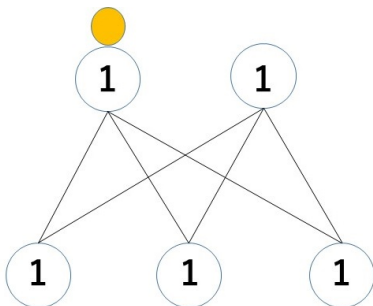


Figure: $t=0$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

完全 2 部グラフ上における VRRW の挙動

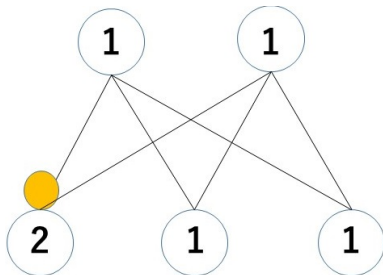


Figure: $t=1$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

完全 2 部グラフ上における VRRW の挙動

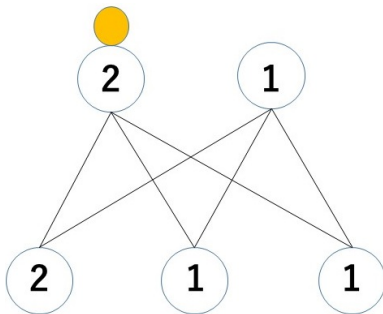


Figure: $t=2$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

完全 2 部グラフ上における VRRW の挙動

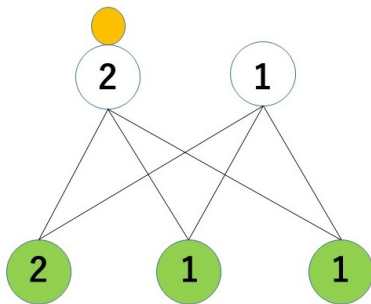
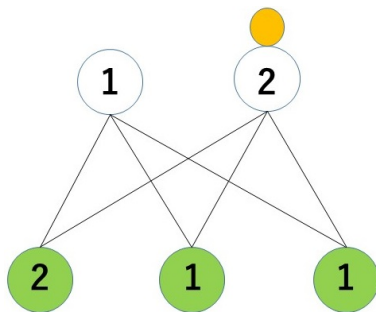


Figure: $t=2$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

緑に塗りつぶされた箇所が動点が次に移動できる場所

完全 2 部グラフ上における VRRW の挙動

Figure: $t=2$

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

緑に塗りつぶされた箇所が動点が次に移動できる場所

→ 動点が左右どちらにいても、次に移動する確率は同じ!

動点が複数の場合における VRRW

ここまで動点が 1 つの場合の VRRW を見てきたが、
次に、動点が d 個 ($2 < d \leq \infty$) の場合の VRRW を考える。
(d 個の動点はそれぞれ独立に動く)

簡単のため、 w を単調非減少関数とし、 $\forall v, w_v := w$ とする。

$d = 3$, 頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1
として、例を見る。

動点が複数の場合における VRRW の挙動例

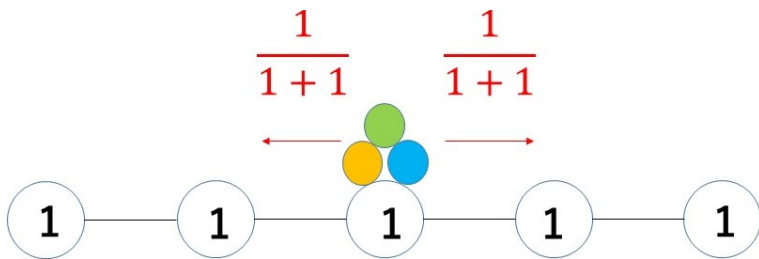


Figure: t=0

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

動点が複数の場合における VRRW の挙動例

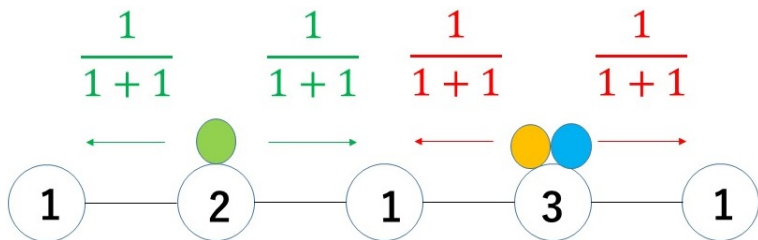


Figure: t=1

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

動点が複数の場合における VRRW の挙動例

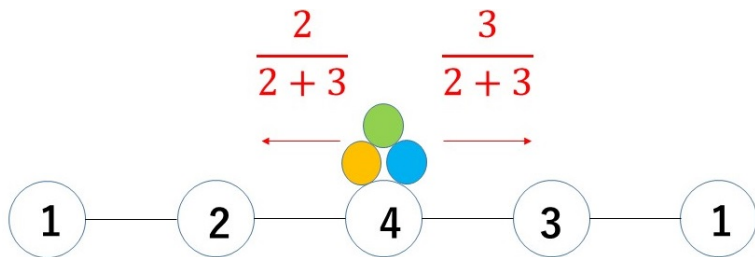


Figure: t=2

頂点の重み = 頂点の訪問回数 + 1

違う動点を通ったところも強化されることが特徴

記号の定義

- X_k^j := 動点 j が k 回動いた時の居場所
- L_k^v := d 個の動点が時刻 k までに v を訪問した回数
($L_k^v = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d \mathbf{1}_{\{X_i^j=v\}}$)
- $\mathcal{F}_k := \{X_\ell^j : j = 1, \dots, d, \ell = 1, \dots, k\}$
から生成される σ 加法族

動点が複数の場合における推移確率

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= (X_k^j : 1 \leq j \leq d), \\ \mathbf{U} &= (u_j \in V : 1 \leq j \leq d), \\ \mathbf{V} &= (v_j \in V : 1 \leq j \leq d) \end{aligned}$$

とすると、

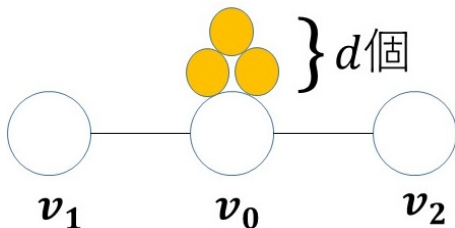
$$P(\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{V} | \mathcal{F}_k) \mathbf{1}_{\{\mathbf{x}_k = \mathbf{U}\}} = \prod_{j=1}^d \frac{w(L_k^{v_j})}{\sum_{v' \in N_{u_j}} w(L_k^{v'})} \mathbf{1}_{\{v_j \in N_{u_j}\}}$$

(これは、各動点が独立であることを表している)

Launay [4] の先行結果

定理 3.1 G が頂点数 3 の星グラフの時、 d 個の動点の初期位置が全て同じならば、

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{w(\ell)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1$$



特別な重みの場合におけるの計算結果

今回、 w の条件を強めて、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell \geq k}^{\infty} \frac{w(k)}{w(\ell)} < \infty$$

の場合を説明する。

- 条件を満たす w の例 $\dots w(k) = 2^k$
- 条件を満たさない w の例 $\dots w(k) = k^\alpha$ ($\alpha > 1$)

特別な重みの場合におけるの計算結果

n_k を、 $\max\{L_{n_k}^{v_1}, L_{n_k}^{v_2}\} = k$ を満たす数とすると、

$$\begin{aligned} P(|\mathcal{G}_\infty| = 2 | \mathcal{F}_{n_k}) &\geq \prod_{\ell=k}^{\infty} \left(\frac{w(\ell)}{w(\ell) + w(k)} \right)^d \\ &= \left(\prod_{\ell=k}^{\infty} \left(1 - \frac{w(k)}{w(\ell) + w(k)} \right) \right)^d \\ &\geq \left(\prod_{\ell=k}^{\infty} \left(1 - \frac{w(k)}{w(\ell)} \right) \right)^d > 0 \end{aligned}$$

$$\forall n, a_n \in (0, 1) \text{ の時, } \prod_{n=0}^{\infty} (1 - a_n) > 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

特別な重みの場合の計算結果

よって、Lévy の 0-1 法則より、

$$P(|g_\infty| = 2) = 1$$

Lévy の 0-1 法則

$\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ とする。 $A \in \mathcal{F}_\infty$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A | \mathcal{F}_n) = \mathbf{1}_A$$

(つまり、 $\exists c > 0, \forall n \geq 0, P(A | \mathcal{F}_n) > c$ ならば $P(A) = 1$)

今発表の主結果 2

定理 3.2 G が完全 2 部グラフならば、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell \geq k}^{\infty} \frac{w(k)}{w(\ell)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1$$

(比較) 定理 3.1 G が頂点数 3 の星グラフの時、 d 個の動点の初期位置が全て同じならば、

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{w(\ell)} < \infty \Rightarrow P(|g_{\infty}| = 2) = 1$$

まとめ・今後の課題

動点が 1 つの場合と同様に、VRRW では完全 2 部グラフにおいて星グラフの計算を用いることができるため、このような拡張が行えた。

現在、

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{w(\ell)} < \infty$$

の場合に、完全 2 部グラフへの拡張が行えるか計算中である。

参考文献

- [1] Pemantle, R. A. (1988). Random processes with reinforcement, Ph.D thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [2] Tarrès, P. (2004). Vertex-reinforced random walk on \mathbb{Z} eventually gets stuck on five points, *Ann. Probab.*, **32**, 2650–2701.
- [3] Cotar, C. and Thacker, D. (2017). Edge- and vertex-reinforced random walks with super-linear reinforcement on infinite graphs, *Ann. Probab.*, **45**, 2655–2706.
- [4] Launay, M (2012). Urns with simultaneous drawing, arXiv 1201.3495