摂動格子の剛体性と非剛体性

新井裕太

千葉大学大学院　融合理工学府

2018 年 8 月 21 日

目次

Notation

便利のため以下のものを定義する.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:確率空間
$((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}), \widehat{\nu})$:摂動格子の空間
$(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)), \mu)$:点過程の空間
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$:摂動格子
ただし,X_z は i.i.d. である r.v.

点過程の定義

配置空間を

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \{\xi = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{x_j} : x_j \in \mathbb{R}^d, \xi(K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : \mathrm{compact}\}$$

とする.
ただし,δ_a は a のデルタ測度で,

$$\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

であり,Λ は可算集合.

点過程の定義

また,$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d) &= \{\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \xi(\{x\}) \leq 1, x \in \mathbb{R}^d\} \\ &= \{\{x_j\}_{j\in\Lambda} \subset \mathbb{R}^d : \sharp(\{x_j\}_{j\in\Lambda} \cap K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : \mathrm{compact}\}\end{aligned}$$

とする.
$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ は多重点がない場合である.

点過程の定義

Definition 1 (漠位相)

$\mathbb{R}^d$ 上のコンパクト台の連続関数 f の全体を $C_c(\mathbb{R}^d)$ とする.
$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ と $\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\langle \xi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\xi(x) = \sum_{i \in \Lambda} f(x_i)$$

と定義する.
$\xi, \xi_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), n = 1, 2, \ldots$ に対して,$\langle \xi_n, f \rangle \to \langle \xi, f \rangle (\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d))$
となるとき ξ_n は ξ に漠収束するという.
この収束によって定まる位相を漠位相という.

Remark

漠位相の下で $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ はポーランド空間 (完備可分距離空間) である.(証明は参考文献 [3],[4] を参照.)

点過程の定義

写像族 $\{\xi \mapsto \xi(K) : K \text{ is compact}\}$ で生成される $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ の σ-加法族を $\mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ とし,$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$-値確率変数 $\xi(\omega)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の点過程という.
本講演では, 可測空間 $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)))$ 上の確率測度 μ も点過程と呼ぶことにする.
ただし, μ はラドン測度で $\mu(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) = 1$ つまり非負整数値ラドン測度を台に持つものである.

Rigidity と Tolerance の定義

Definition 2 (Rigidity)

点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と球 $B \subset \mathbb{R}^d$ において
$\mathbb{Z}_{in}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B$、$\mathbb{Z}_{out}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B^c$ と定義するとき、
$\forall B \subset \mathbb{R}^d$ において

$$N_B(\mathbb{Z}_{out}(B)) = |\mathbb{Z}_{in}(B)| \ a.s.$$

となるような $\mathbb{R}^d$ に含まれる離散点集合の集合族上の可測関数 $N = N_B$ が存在するとき，$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid であるという.

Rigidity と Tolerance の定義

Definition 3 (Tolerance)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ の点を $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ a.s. であるような $\mathbb{R}^d$ 値確率変数 Z とする.

1. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が deletion tolerant である
$\forall Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において、$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \setminus Z$ が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ に関して絶対連続である.
2. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が deletion singular である
$\forall Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において、$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \setminus Z$ と $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が相互特異である.
3. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が insertion tolerant である
ルベーグ測度 $\mathcal{L}(V) \in (0, \infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において、U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様なとき $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cup U$ が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ に関して絶対連続である.
4. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が insertion singular である
ルベーグ測度 $\mathcal{L}(V) \in (0, \infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において、U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様なとき $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cup U$ と $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が相互特異である.

Definition 4

任意の異なる $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ の点 $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ において,$Z = \{Z_1, Z_2, ..., Z_k\}$ とする.
また, ルベーグ測度 $\mathcal{L}(V) \in (0, \infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において、$U_1, U_2, ..., U_k$ を V において一様で独立な点であり $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立であるとし,$U = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ とする.

1. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が k-deletion tolerant である
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \setminus Z$ が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ に関して絶対連続である.
2. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が k-deletion singular である
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \setminus Z$ と $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が相互特異である.
3. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が k-insertion tolerant である
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cup U$ が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ に関して絶対連続である.
4. 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が k-insertion singular である
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cup U$ と $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ が相互特異である.

Peres と Sly の結果

Peres と Sly が出した結果について述べる.
任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において,

$$\mathbb{Z}_s(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d \setminus S\}$$

とする.

Proposition 5 (6)

全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
摂動格子 $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ が rigid である.
$\iff$ 任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ が相互特異である.

Holroyd と Soo の結果

Holroyd と Soo の結果として以下の結果がある.

Lemma 6 (2)

全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているという仮定において,
1 次元で perturbation X_z が有界 *1* 次モーメントを持つときか、*2* 次元で perturbation X_z が有界 *2* 次モーメントを持つとき、摂動格子が deletion singular である.

Peres と Sly の結果

3 次元以上での Gaussian perturbation の結果については次の結果がある.

Theorem 7 (6)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を Gaussian$N_d(0, \sigma I)$perturbation を持つ $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.
このとき,$d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \sigma_r(d) \leq \sigma_c(d)$ が存在する.
[1] $\sigma > \sigma_c$ のとき
$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant で $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続である.
[2] $0 < \sigma < \sigma_c$ のとき
$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion singular.
[3] $0 < \sigma < \sigma_r$ のとき
$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid.
[4] $\sigma > \sigma_r$ のとき
$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は non-rigid

Peres と Sly の結果

定理 7 を示すためには以下の命題と補題が使われている.

Proposition 8 (6)

$d \geq 3$ において, 以下を満たす $\rho(d) > 1$ が存在する.
$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を全てにおいて正の値を取る密度 $g(z)$ を持つような i.i.d. な perturbation$\{X_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d}$ を持つ d 次元摂動格子とする.

$$\max_i \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{g(z+e_i)}{g(z)} \right)^2 g(z)dz < \rho(d)$$

を満たすとき, 摂動格子 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant である.

Peres と Sly の結果

Lemma 9 (6)

$z_0 = 0$ である $\mathbb{Z}^d$ 上の nearest neighbor なパスを $\gamma = (z_0, z_1, ...)$ とし,$\gamma_n = (z_0, z_1, ..., z_n)$ とする.
i.i.d. であるような $\{X_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ に対して

$$M_{n,d} := \sup_{\gamma} \sum_{z \in \gamma_n} X_z$$

$M_d := \limsup \frac{1}{n} M_{n,d}$ とする.
X_z を $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度に関して絶対連続である分布を持つものとし,$|X_z|_1$ を $\mathbb{E}X^d(\log X)^{d+\varepsilon} < \infty$ と $M_d(|X_z|_1) < \frac{1}{2}$ を満たすものとする.
そのとき,perturbation$\{X_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$ を持つ摂動格子は k-deletion singular である.

Peres と Sly の結果

Proposition 10 (6)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ とし, 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
そのとき以下は同値
(1) 摂動格子が deletion tolerant である.
(2) 摂動格子が insertion tolerant である.
(3) 摂動格子が deletion singular でない.
(4) 摂動格子が insertion singular でない.
(5) 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
(6) 点過程 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

Peres と Sly の結果

この命題をより一般化したものが次の命題である.

Proposition 11 (6)

全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
$S \subset \mathbb{Z}^d$ を濃度が $k \in \mathbb{N}$ である集合とする.
そのとき以下は同値
(1) 摂動格子が k-deletion tolerant である.
(2) 摂動格子が k-insertion tolerant である.
(3) 摂動格子が k-deletion singular でない.
(4) 摂動格子が k-insertion singular でない.
(5) 測度 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
(6) 測度 $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

Peres と Sly の結果

Cauchy perturbation については以下の結果がある.

Lemma 12 (6)

$d=1$ とし,$\{X_z\}$ を i.i.d. でコーシー分布に従う perturbation とする.
そのとき, 摂動格子は $\forall k \in \mathbb{N}$ において,k-deletion singular である.

より一般的な perturbation に関する結果については次の定理のようなものがある.

Peres と Sly の結果

Theorem 13 (6)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を密度を $g(z)$ とする perturbation X_z を持つ摂動格子とする.
[1] $d < \alpha < 2d$ で

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} > 0$$

のとき
$\forall k \in \mathbb{N}$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は k-deletion tolerant であり,k-insertion tolerant である.
$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続である.
[2] $\alpha > 2d$ で

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} < \infty$$

のとき
$0 < \forall \epsilon' < \epsilon$ と $\forall k$ において perturbation $\epsilon' X_z$ を持つ摂動格子が
deletion singular となるような ϵ が存在する.
この結果は,$\mathbb{E}|X_z|^{\alpha-d} < \infty$ という条件のもとでも成り立つ.

ラプラス摂動格子について

ラプラス摂動格子に関する結果を以下で述べる.

Theorem 14 (A)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を i.i.d. な確率変数 X_z が d 次元ラプラス分布 $BEx_d(\frac{1}{\lambda})$ に従うような $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.
このとき,$d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \lambda_c(d) < \infty$ が存在する.

$[1]$ $\lambda > \lambda_c(d)$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion singular.

$[2]$ $0 < \lambda < \lambda_c(d)$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant であり insertion tolerant で $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続である.

Proof

1 次元ラプラス分布を $g(z) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{g(z+1)}{g(z)}\right)^2 g(z)dz &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{g(z+1)}{g(z)}\right)^2 g(z)dz \\
&+ \int_{\mathbb{R}_-} \left(\frac{g(z+1)}{g(z)}\right)^2 g(z)dz \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\lambda}\int_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda z}dz + \frac{1}{2}e^{-2\lambda}\int_{-1}^{0} \lambda e^{-3\lambda z}dz \\
&+ \frac{1}{2}e^{2\lambda}\int_{-\infty}^{-1} \lambda e^{\lambda z}dz \\
&= \frac{1}{3}e^{-2\lambda} + \frac{2}{3}e^{\lambda}
\end{aligned}$$

Proof

同様に, 密度 $g_d(z)$ を持つ d 次元ラプラス測度を積測度とする.
方向が e_i ではない積がキャンセルされることに注意し計算すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{g_d(z+e_i)}{g_d(z)}\right)^2 g_d(z)dz &= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{g(z+1)}{g(z)}\right)^2 g(z)dz \\ &= \frac{1}{3}e^{-2\lambda}+\frac{2}{3}e^{\lambda}\end{aligned}$$

よって, 十分小さな $\lambda>0$ において命題 8 より $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant であり insertion tolerant で $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続.

また, スケーリングにより, 重み $|X_z|_1$ を持つ greedy lattice animal は $\frac{1}{\lambda}$ に依存する $M(|X_z|_1)$ という有限な極限値を持つ.
(greedy lattice animal に関しては [1] を参照)
よって, 補題 9 により十分大きい $\lambda>0$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion singular.
したがって, 命題 10 より, $\lambda>\lambda_c(d)$ において deletion singular であり,$0<\lambda<\lambda_c(d)$ において deletion tolerance であるような $\lambda_c(d)$ が存在する.

コンパクトな台を持つ場合

$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ の i.i.d. な確率変数 X_z が分布としてコンパクトな台を持つ場合については Holroyd と Soo による以下の結果がある.

Theorem 15 (2)

X_z がコンパクトな台を持つとき，全ての d において $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互絶対連続でない.

コンパクトな台を持つ場合

$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ の i.i.d. な確率変数 X_z が分布としてコンパクトな台を持つ場合相転移現象は起きるか?

→ $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ が相互特異である場合があるのは自明なので,$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ が相互絶対連続でなく, 相互特異でない場合はあるかが問題

一様摂動格子について

Theorem 16 (A)

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を Uniform perturbation $U_d(-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L)$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ の perturbed lattice とする.
このとき, $d \geq 3$ において以下が成り立つ.
$\underline{[1]\ L > L_c(d)\ のとき}$
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異でなく, 相互絶対連続でない.
$\underline{[2]\ L < L_c(d)\ のとき}$
$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異である.

参考文献

- Alberto Gandolfi ,Harry Kesten, "Greedy Lattice Animals II: Linear Growth",The Annals of Applied Probability 4 (1994)
- Alexander E. Holroyd, Terry Soo, "Insertion and Deletion Tolerance of Point Processes",arXiv:1007.3538 ,(2010).
- Olav Kallenberg, "Random Measures",Academic press ,(1986).
- Peter Jagers, "Aspects of random measures and point processes",Chalmers institute of technology and the University of Goteborg. Department of mathematics,(1972).
- Peter Morters and Yuval Peres, "Brownian motion",Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- Yuval Peres, Allan Sly, "Rigidity and tolerance for perturbed lattices",arXiv:1409.4490v1 [math.PR] ,(2014).

ご静聴ありがとうございました.