跳躍流入をもつ拡散過程に関する極限定理

京都大学大学院理学研究科修士2年　山戸康祐

August 21, 2018

跳躍流入をもつ拡散過程(jumping-in diffusion)

確率過程$X = X_t$が跳躍流入をもつ拡散過程とは,

- Xは$[0, \infty)$上の時間的一様な強マルコフ過程で,
- 開区間$(0, \infty)$上で連続な道をもち,
- 原点0にhitすると直ちに$(0, \infty)$に跳躍によって流入する.

- 原点からのジャンプ以外は拡散過程のように振舞う確率過程,
- 他の文献では, diffusion with jump boundary, diffusion with redistributionなどとも.

定理 (Itô('69))(JDの存在条件)

自然尺度のもとでXの周遊測度nは条件(C)を満たすdm, jを用いて次のように表される:

$$n[A] = \int_0^\infty \mathbb{P}_x^m[A]\, j(dx).$$

$$\text{(C)} \begin{cases} (i)\ j(1,\infty) + \int_0^1 xj(dx) - \int_0^1 j(dx) \int_0^x m(y)dy < \infty, \\ (ii)\ j(0,1) = \infty. \end{cases}$$

- dm: $(0,\infty)$上のラドン測度(スピード速度),
- j: $(0,\infty)$上のラドン測度(ジャンプ速度),
- $\mathbb{P}_x^m$: xから出発し原点で停止する$\frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}$-diffusionの分布.

逆に, (C)を満たす(m,j)に対し, 対応するJDが存在する.

以下, (m,j)の組は常に条件(C)を満たすものとする.

つまり, JDは条件(C)を満たす(m, j)により特徴づけられる.

- mは$(0, \infty)$上で拡散を特徴づけるスピード測度,
- jは原点からの跳躍の着地点を決めるジャンプ測度.

問題

$X_{m,j}$の原点における逆局所時間$\eta_{m,j}$の揺動スケール極限:

$$\frac{1}{\lambda^{1/\alpha}}(\eta_{m,j}(\lambda t) - b\lambda t) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{d} ? \quad (\alpha \in (0, 2],\ b \geq 0)$$

の存在は(m, j)に関するどのような条件から従うか?

意義

- (ジャンプのない)通常の1次元拡散過程の場合の結果との対比
- 滞在時間分布の解析への応用

先行研究: JDのスケール極限

Yano('08): $X_{m,j}$自身のスケール極限:

1. $\int_0^\infty x\, j(dx) < \infty,\ m(x) \sim x^{1/\alpha - 1}K(x)\ (x \to \infty)$

   $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}X_{m,j}(\lambda^{1/\alpha}K(\lambda)t) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{d} Y^{(\alpha)}(t)$ in $\mathbb{D}$.

   ($\alpha \in (0,1)$, $Y^{(\alpha)}$は$(2-2\alpha)$次元の反射壁ベッセル過程)

2. $j(x,\infty) \sim x^{-\beta}L(x),\ m(x) \sim x^{1/\alpha - 1}K(x)\ (x \to \infty)$

   $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}X_{m,j}(\lambda^{1/\alpha}K(\lambda)t) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{d} X_{m^{(\alpha)},j^{(\beta)}}(t)$ in $\mathbb{D}$.

   ($\alpha \in (0,\infty)$, $\beta \in (0, 1 \wedge \alpha^{-1})$)

   (K, Lは無限遠で緩変動)

- $\alpha > 1$では$Y^{(\alpha)}$は原点を流出境界にもつ,
- $X_{m^{(\alpha)},j^{(\beta)}}$は$\alpha \in (0,\infty)$, $\beta \in (0, 1 \wedge \alpha^{-1})$の場合のみ存在,
- $\int_0^\infty xj(dx) < \infty$なら, スケール極限でジャンプが消える,
- $j(x,\infty) \sim x^{-\beta}$なら, スケール極限でジャンプが残る.

$\eta_{m,j}$の摇動スケール極限は①, ②以外の場合にも存在する.

準備

定義 (string)

- $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$がstring
  $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ mは狭義単調増加, 右連続, $\int_0^1 x dm(x) < \infty$,

m: stringに対し, 以下を定める:

- $G(m;x) = \int_0^x m(y)dy \ (x \geq 0)$,
- $G^1(m;x) = \int_0^x (m(y) - m(1))dy \ (x \geq 0)$,
- $G^{k+1}(m;x) = -\int_0^x dy \int_y^1 G^k(m;z)dm(z) \ (k \geq 1, x \geq 0)$,
- $d(m) = \inf\left\{k \geq 1 : \int_0^1 |G^k(m;x)|dm(x) < \infty\right\}$.

$d(m)$: 大 $\Leftrightarrow$ mの原点での発散のオーダー: 大

$\exists\epsilon, C > 0$に対し, $|m(x)| \leq x^{-1+\epsilon}$ $(x \leq 1) \Rightarrow d(m) < \infty$.

<u>以下, 緩変動とは常に無限遠での挙動を指すものとする.</u>

主結果

定理 ($\eta_{m,j}$の揺動スケール極限, $1 < \alpha < 2$)

m: string, j: ジャンプ測度, K: 緩変動関数に対し,
以下を仮定する:

1. $d(m) = 1$,
2. ある$\alpha \in (1,2)$に対し, $m(x) \sim -x^{1/\alpha - 1} K(x)$ $(x \to \infty)$,
3. $\int_0^\infty xj(dx) < \infty$.

このとき$b = -\int_0^\infty G(m;x) j(dx)$に対し, 以下が成り立つ:

$$\frac{1}{\gamma^{1/\alpha} K(\gamma)} (\eta_{m,j}(\gamma t) - b\gamma t) \xrightarrow[\gamma \to \infty]{d} T^{(\alpha)}(\kappa t) \text{ on } \mathbb{D}. \tag{1}$$

ここで$\kappa = \int_0^\infty xj(dx)$, $T^{(\alpha)}$は$\chi(\lambda) = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \{\alpha(\alpha - 1)\}^{\alpha - 1} \lambda^\alpha$をLaplace exponentにもつ片側$\alpha$-安定過程.

- $\alpha = 1$の場合も類似の主張が成り立つが, 多少条件が複雑になるので省略.

定理 ($\eta_{m,j}$の揺動スケール極限, $\alpha = 2$)

m: string, j: ジャンプ測度に対し, 以下を仮定する:

1. $d(m) = 1$,
2. 関数$K(x) = \int_0^x m(y)^2 dy$が緩変動,
3. $\int_0^\infty xj(dx) < \infty$.

このとき$b = -\int_0^\infty G(m;x)j(dx)$に対し, 以下が成り立つ:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma K(\gamma)}}(\eta_{m,j}(\gamma t) - b\gamma t) \xrightarrow[\gamma\to\infty]{d} B(2\kappa t) \text{ on } \mathbb{D}. \qquad (2)$$

ここで$\kappa = \int_0^\infty \left(x + \frac{1}{K(\infty)} \int_0^x dy \int_0^y G(m;z)dm(z) \right) j(dx)$, Bは標準ブラウン運動.

例: $m(x) \sim x^{-1/2}(\log x)^c$ $(x \to \infty)$.
$c < -1/2$なら, $K(\infty) < \infty$, $c \geq -1/2$なら, $K(\infty) = \infty$.

定理 ($\eta_{m,j}$の揺動スケール極限, $\alpha > 2$)

m: string, j: ジャンプ測度に対し, 以下を仮定する:

1. $d(m) < \infty$,
2. ある$C_1 > 0$, $\alpha > 2$に対し, $-m(x) \le C_1 x^{1/\alpha - 1}$ $(x \ge 1)$,
3. ある$C_2 > 0$, $\beta > 2/\alpha$に対し, $j(x, \infty) \le C_2 x^{-\beta}$ $(x \ge 1)$,
4. $-\int_0^1 j(dx) \int_0^x dy \int_y^\infty G(m; z) dm(z) < \infty$.

このとき$b = -\int_0^\infty G(m; x) j(dx)$に対し, 以下が成り立つ:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\eta_{m,j}(\gamma t) - b\gamma t) \xrightarrow[\gamma \to \infty]{d} B(2\kappa t) \text{ on } \mathbb{D}. \tag{3}$$

ここで$\kappa = -\int_0^\infty j(dx) \int_0^x dy \int_y^\infty G(m; z) dm(z)$.

証明の方針

- $\eta_{m,j}$のLaplace exponent $\chi_{m,j}(\lambda)$は:
$$\int_0^\infty (1 - g_\lambda(m;x))j(dx), \quad (\lambda > 0)$$
と表される(周遊測度の形とdiffusionの結果から).
- $u = g_\lambda(m;\cdot)$はODE$\frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}u = \lambda u, \ u(0) = 1$の減少解.

このとき変数変換から,
$$\frac{1}{\gamma^{1/\alpha}}(\eta_{m,j}(\gamma t) - b\gamma t) \overset{d}{=} \eta_{m_\gamma,j_\gamma}(t) - b_\gamma t,$$

$$m_\gamma(x) = \frac{m(\gamma x)}{\gamma^{1/\alpha-1}}, \ j_\gamma(dx) = \gamma j(d(\gamma x)), \ b_\gamma = \frac{b}{\gamma^{1/\alpha-1}}$$

or $$m_\gamma(x) = \frac{m(\gamma^p x)}{\gamma^{1/\alpha-p}}, \ j_\gamma(dx) = \gamma j(d(\gamma^p x)), \ b_\gamma = \frac{b}{\gamma^{1/\alpha-1}}, \ p > 1$$

$\eta_{m,j}$の$(m.j)$に関する適切な意味での連続性を示すことに帰着.

$\eta_{m,j}$の連続性定理

$j_\gamma(dx) \overset{v}{\to} 0$ on $(0,\infty]$が成り立つので,
$g_\lambda(m_\gamma; x)$の$\gamma \to \infty$, $x \to +0$での挙動が問題となる.

$g_\lambda(m;\cdot)$の原点付近での挙動の解析:

- $g_\lambda(m;\cdot)$をより分かりやすいODE$\frac{d}{dm}\frac{d^+}{dx}u = \lambda u$の解の線形結合に分解する.
- $u(0) = 0$, $u^+(0) = 1$を満たす解$u = \psi_\lambda(m;\cdot)$は常に存在.
- $u(0) = 1$, $u^+(0) = 0$を満たす解は原点が流出境界の場合には存在しない.
- しかし, $d \geq d(m)$に対し, 修正ノイマン境界条件を満たす解$u = \varphi^d(m;\cdot)$が構成できる.

修正ノイマン境界条件: $d = 1$の場合

$u(0) = 1,\ \lim_{x\to 0}(u^+(x) - (m(x) - m(1))) = 0.$

$g_\lambda(m;\cdot)$の原点付近での挙動(続き):

- $g_\lambda(m;\cdot)$の分解: $g_\lambda(m;\cdot) = \varphi_\lambda^d(m;\cdot) - c_\lambda^d(m)\psi_\lambda(m;\cdot)$,
- $1 - g_\lambda(m;x)$のfirst orderは$-\lambda G(m;x)$ ($\varphi_\lambda^d(m;\cdot)$のsecond order),
- second orderは$d(m)$に応じて変わる:
  - $d(m) = 1$なら, $(c_\lambda^1(m) + \lambda m(1))x$ ($\psi_\lambda(m;\cdot)$のfirst order),
  - $d(m) \geq 2$なら, $-\lambda^2 G^2(m;x)$ ($\varphi_\lambda^d(m;\cdot)$のthird order).

$d(m)$に応じて異なる連続性定理が必要.

連続性定理の準備: stringの収束

stringの収束

m_n, m: string に対し, 以下を定める:

$m_n \xrightarrow{*} m \overset{def}{\Leftrightarrow}$

1. mの連続点xに対し, $\lim_{n\to\infty} m_n(x) = m(x)$,
2. $(ii)\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_0^\delta m_n(x)^2 dx = 0$.

$m_n \xrightarrow{G} 0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

1. すべてのxに対し, $\lim_{n\to\infty} m_n(x) = 0$,
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x dm_n(x) = 0$,
3. ある$d \geq 1$に対し, $\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |G^d(m_n; x)| dm_n(x) = 0$.

stringの各点収束+原点へ逃げるmassの"有界性".

連続性定理の準備: $c_\lambda^d(m_n)$の挙動

$m_n \xrightarrow{*} m$のとき

$d(m)=1$の場合には, Krein-Kotani対応(Kotani('07))から, 次が成立:

$$c_\lambda^1(m) = \lambda h(m^*;\lambda) - \lambda m(1)$$

($h(m^*;\lambda)$はmのdual string m^*のスペクトル特性関数).
さらに, 対応の連続性から, 次が成立:

$$h(m_n^*;\lambda) \xrightarrow{n\to\infty} h(m^*;\lambda),\ \ \lambda > 0.$$

$m_n \xrightarrow{G} 0$のとき

$m_n \xrightarrow{G} 0$の定義から$\psi_\lambda(m_n;\cdot)$, $\varphi_\lambda^d(m_n;\cdot)$の原点付近における一様な評価が成り立ち, 次が従う:

$$c_\lambda^d(m_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

定理 (連続性定理: $m_n \xrightarrow{*} m$)

m_n, m: string, j_n: ジャンプ測度に対し,次を仮定する:

1. $m_n \xrightarrow{*} m$
2. $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty |G(m_n; y)| j_n(dy) = 0$,
3. $j_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{v} 0$ on $(0, \infty]$,
4. ある$\kappa > 0$に対し, $x1_{(0,1]}(x) j_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{w} \kappa\delta_0(dx)$.

このとき$b_n = -\int_0^\infty G(m_n; x) j_n(dx)$に対し, 次が成立:

$$\eta_{m_n,j_n}(t) - b_n t \xrightarrow[n\to\infty]{d} T(m; \kappa t) \text{ on } \mathbb{D}.$$

ここで, $T(m; t)$は$\chi(\lambda) = \lambda h(m^*; \lambda)$をLaplace exponentにもつ正スペクトルなLévy過程.

この定理から$\alpha \in [1, 2)$の場合の揺動スケール極限の結果が従う.

- $\alpha = 2$の場合はstringの収束概念を少し弱めることで得られる.

定理 (連続性定理: $m_n \xrightarrow{G} 0$)

m_n: string, j_n: ジャンプ測度に対し, 次を仮定する:

1. $m_n \xrightarrow{G} 0$,
2. $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty |G(m_n; y)| j_n(dy) = 0$,
3. $\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 x j_n(dx) < \infty$,
4. $j_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{v} 0$ on $(0, \infty]$,
5. ある$\kappa > 0$に対し, $G^2(m_n; x) 1_{(0,1]}(x) j_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{w} \kappa\delta_0(dx)$.

このとき$b_n = -\int_0^\infty G(m_n; x) j_n(dx)$に対し, 次が成立:

$$\eta_{m_n, j_n}(t) - b_n t \xrightarrow[n\to\infty]{d} B(2\kappa t) \text{ on } \mathbb{D}.$$

この定理から$\alpha > 2$の場合の揺動スケール極限の結果が従う.

応用: JDの正側滞在時間

定義: $\mathbb{R}$上のJD

2つのJD: X_{m_+,j_+}, X_{m_-,j_-} を原点でつないで$\mathbb{R}$上のJD: $X_{m_+;m_-,j_+;j_-}$ を構成する.

- 周遊理論を用いて構成する,
- $X_{m_+;m_-,j_+;j_-}$ の周遊測度は$n_{m_+,j_+}(de) + n_{m_-,j_-}(d(-e))$,
- $X_{m_+;m_-,j_+;j_-}$ は,
  正側では$\frac{d}{dm_+}\frac{d^x}{dx}$-diffusion,
  負側では$\frac{d}{dm_-}\frac{d^x}{dx}$-diffusionとして振舞い,
  原点からジャンプ測度$j(dx) = j_+(dx) + j_-(d(-x))$に従って$\mathbb{R} \setminus \{0\}$に流入する.

応用: JDの正側滞在時間

問題

1. 正側滞在時間$A_+(t) = \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X_{m_+;m_-,j_+;j_-}(s))ds$と定めるとき,
$$\frac{1}{t}A_+(t) \xrightarrow[t\to\infty]{d} ?$$
はいつ存在するか.
2. また極限が退化する場合:
$$\frac{1}{t}A_+(t) \xrightarrow[t\to\infty]{P} p \in (0,1),$$
の揺動のスケール極限はどうなるか.

先行研究: 通常の1次元拡散過程の場合

定理 (Kasahara and Watanabe('06))

m: $\mathbb{R}$上の有限ラドン測度に対し, 次が成り立つとする:

$$m(x,\infty) \sim c_+ x^{1/\alpha-1} K(x),\ \ m(-\infty,x) \sim c_- x^{1/\alpha-1} K(x)$$

$(c_\pm > 0,\ \alpha \in (1,2),\ K:$ 緩変動関数$)$.
このとき, A_+: mをスピード測度にもつ拡散過程の正側滞在時間に対し, 次が成立:

$$\frac{m(\mathbb{R})^{1/\alpha}}{\gamma^{1/\alpha} K(\gamma)} (A_+(\gamma t) - p\gamma t) \xrightarrow[\gamma\to\infty]{f.d.} (1-p)c_+ T^{(\alpha)}(t) - pc_- \widetilde{T}^{(\alpha)}(t)$$

ここで$p = \frac{m(0,\infty)}{m(\mathbb{R})}$, $T^{(\alpha)}$, $\widetilde{T}^{(\alpha)}$: 独立な片側α-安定過程,

- 揺動のスケール極限は非対称なα-安定過程 $(\alpha \in (1,2))$,
- 逆局所時間のスケール極限に関する定理の応用.
- $\alpha = 1, 2$に対しても類似の主張が成立.

JDの場合の困難

- Kasahara and Watanabe('06)では1次元拡散過程がブラウン運動の時間変更で得られることを利用.
  $\Rightarrow$ JDの場合には同様の議論はできない,
- 通常の時計に沿ったスケール極限を見るのは難しいので, 指数時間に沿ったスケール極限を考える.

指数時間に沿ったスケール極限

$\mathbf{e}$: パラメータ1の指数分布に従う確率変数, $\mathbf{e} \perp\!\!\!\perp X_{m_+;m_-,j_+;j_-}$.
$\mathbf{e}_q = \frac{\mathbf{e}}{q}$, $f(q)$: $f(q) \xrightarrow{q\to+0} 0$なる関数に対し, 次の極限を考える:

$$\frac{1}{\mathbf{e}_{f(q)}}(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) \xrightarrow[q\to+0]{d} ? \tag{4}$$

$b_\pm = -\int_0^\infty G(m_\pm; x) j_\pm(dx)$と定める.

主結果2

定理 (正側滞在時間の揺動スケール極限)

K: 緩変動関数とし, 以下を仮定する:

1. $d(m_\pm) = 1$,
2. $\exists c_\pm > 0$, $\exists \alpha \in (1,2)$, $m_\pm(x) \sim c_\pm x^{1/\alpha - 1} K(x)$ $(x \to \infty)$,
3. $\int_0^\infty x \, j_\pm(dx) < \infty$.

このとき次が成り立つ:

$$\frac{1}{\mathbf{e}_{f(q)}} (A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) \xrightarrow[q \to +0]{d} (1-p)c_+ T^{(\alpha)}(\mathbf{e}) - pc_- \widetilde{T}^{(\alpha)}(\mathbf{e})$$

$$\left(\mathbf{e}_q = \frac{\mathbf{e}}{q}, \ p = \frac{b_+}{b_+ + b_-}, \ f(q) = \frac{1}{K(1/q)} (b_+ + b_-)^{1/\alpha} q^{1/\alpha} \right).$$

条件は「スケール極限の存在 + 正側・負側のバランス」

- $\alpha = 1, 2, \alpha > 2$のときも同様の主張が成立.

証明の概略

$$\frac{1}{\mathbf{e}_{f(q)}}(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) \xrightarrow[q\to+0]{d} (1-p)c_+ T^{(\alpha)}(\mathbf{e}) - pc_- \widetilde{T}^{(\alpha)}(\mathbf{e})$$

を示すには,

$$(f(q)(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q), \mathbf{e}) \xrightarrow[q\to+0]{d} ((1-p)c_+ T^{(\alpha)}(\mathbf{e}) - pc_- \widetilde{T}^{(\alpha)}(\mathbf{e}), \mathbf{e})$$

を示せば十分. フーリエ変換を調べる.

$$\begin{aligned}
&E[\exp(i\xi_1 f(q)(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) + i\xi_2\mathbf{e})] \\
=&qE\left[\int_0^\infty \exp(i\xi_1 f(q)(A_+(u) - pu) + i\xi_2 qu - qu)du\right] \\
=&qE\left[\sum_\ell \int_{\eta(\ell-)}^{\eta(\ell)} \exp(i\xi_1 f(q)(A_+(u) - pu) + i\xi_2 qu - qu)du\right]
\end{aligned}$$

- $\eta(t)$は$X_{m_+;m_-,j_+;j_-}$の原点における逆局所時間,

指数時間に沿って見ることとで, A_+を周遊路毎に考えられる.

周遊理論を用いて計算すると,

$$
\begin{aligned}
&E[\exp(i\xi_1 f(q)(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) + i\xi_2\mathbf{e})] \\
=&\frac{q}{\chi_{m_+,j_+}(q_+) + \chi_{m_-,j_-}(q_-)}\left(\frac{\chi_{m_+,j_+}(q_+)}{q_+} + \frac{\chi_{m_-,j_-}(q_-)}{q_-}\right)
\end{aligned}
$$

ただし,

$q_+ = -i\xi_1 f(q)(1-p) - (i\xi_2 - 1)q,\ \ q_- = i\xi_1 f(q)p - (i\xi_2 - 1)q.$

ここで,

$$
\frac{\chi_{m_\pm,j_\pm}(q_\pm)}{q_\pm} \xrightarrow{q\to+0} b_\pm
$$

は容易にわかる. $p = \frac{b_+}{b_+ + b_-}$ より,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\chi_{m_+,j_+}(q_+) + \chi_{m_-,j_-}(q_-)}{q} \\
=&\frac{\chi_{m_+,j_+}(q_+) - b_+q_+}{q} + \frac{\chi_{m_-,j_-}(q_-) - b_-q_-}{q} + (b_+ + b_-)(i\xi_2 - 1)
\end{aligned}
$$

ここで, $\frac{\chi_{m_\pm, j_\pm}(q_\pm) - b_\pm q_\pm}{q}$ がLévy過程: $q_\pm \left(\eta_{m_\pm, j_\pm}\left(\frac{t}{q}\right) - b_\pm \frac{t}{q} \right)$ のLaplace exponentなので, スケール極限の結果より,

$$\frac{\chi_{m_+, j_+}(q_+) - b_+ q_+}{q} \xrightarrow{q \to +0} (1-p)^\alpha c_+^\alpha \varphi^{(\alpha)}(\xi_1),$$

$$\frac{\chi_{m_-, j_-}(q_-) - b_- q_-}{q} \xrightarrow{q \to +0} p^\alpha c_-^\alpha \varphi^{(\alpha)}(-\xi_1).$$

ここで, $\varphi^{(\alpha)}$ は $T^{(\alpha)}$ のcharacteristic exponent. よって,

$$\begin{aligned}
&\lim_{q \to +0} E[\exp(i\xi_1 f(q)(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) + i\xi_2 \mathbf{e})] \\
=& \frac{1}{(1-p)^\alpha c_+^\alpha \varphi^{(\alpha)}(\xi) + p^\alpha c_-^\alpha \varphi^{(\alpha)}(-\xi) + (i\xi_2 - 1)} \\
=& E[\exp(i\xi_1((1-p)c_+ T^{(\alpha)}(\mathbf{e}) - pc_- \widetilde{T}^{(\alpha)}(\mathbf{e})) + i\xi_2 \mathbf{e})].
\end{aligned}$$

同様の議論から次もわかる.

定理 (正側滞在時間の揺動スケール極限)

以下を仮定する:

1. $d(m_\pm) =< \infty$,
2. $\exists C_1 > 0$, $\exists \alpha_\pm > 2$, $m_\pm(x) \le C_1 x^{1/\alpha_\pm - 1}$ $(x \ge 1)$,
3. $\exists C_2 > 0$, $\exists \beta_\pm > 2/\alpha_\pm$, $j_\pm(x, \infty) \le C_2 x^{-\beta}$.
4. $\kappa_\pm := -\int_0^1 j_\pm(dx) \int_0^x dy \int_y^\infty G(m_\pm; z) dm_\pm(z) < \infty$.

このとき次が成り立つ:

$$\frac{1}{\mathbf{e}_{f(q)}}(A_+(\mathbf{e}_q) - p\mathbf{e}_q) \xrightarrow[q \to +0]{d} \sqrt{2\kappa_+}(1-p)T^{(\alpha)}(\mathbf{e}) - \sqrt{2\kappa_+}p\widetilde{T}^{(\alpha)}(\mathbf{e})$$

$$\left(\mathbf{e}_q = \frac{\mathbf{e}}{q},\ p = \frac{b_+}{b_+ + b_-},\ f(q) = \frac{1}{K(1/q)}(b_+ + b_-)^{1/\alpha} q^{1/\alpha}\right).$$

条件は「スケール極限の存在 + 正側・負側のバランス」

- $\alpha = 1, 2, \alpha > 2$のときも同様の主張が成立.