無限次元後退確率微分方程式の解の有限次元近似

浜口雄史

京都大学理学研究科

2018.08.21

1. 無限次元確率積分
2. 無限次元 BSDE
   - 解の定義, 存在および一意性 (Theorem 1)
   - 解の有限次元近似 (Theorem 2)

1. 無限次元確率積分
2. 無限次元 BSDE
   - 解の定義, 存在および一意性 (Theorem 1)
   - 解の有限次元近似 (Theorem 2)

設定

"無限次元マルチンゲール" に関する確率積分の構成.

(c.f. De Donno and Pratelli, 2004)

- $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbf{P})$: 確率空間, usual conditions, $T < \infty$
- $\mathcal{P}$: predictable σ-field on $\Omega \times [0, T]$
- $\mathcal{H}^2 = \{$ 二乗可積分マルチンゲール $\}$
- X: コンパクト距離空間 (index set)
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{M} = \mathcal{C}'$ (Radon measures on X)
  $\langle \mu, \phi \rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_X \phi(x)\,\mu(dx)$, $\mu \in \mathcal{M}$, $\phi \in \mathcal{C}$.
- $\mathbb{M} = \{(M_t^x)_{t\in[0,T]}\}_{x\in X}$, $M^x = (M_t^x)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{H}^2$, $\forall x \in X$

設定

Assumption

$\exists A$: strictly increasing, bounded, continuous, adapted process,
$\exists \mathcal{Q}\colon \Omega \times [0,T] \times X \times X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$-measurable
s.t.

- 任意の $(\omega, t) \in \Omega \times [0,T]$ に対し，関数 $X \times X \ni (x,y) \mapsto \mathcal{Q}_{\omega,t}(x,y) \in \mathbb{R}$ は continuous, symmetric, nonnegative-definite.
- 関数 $X \times X \ni (x,y) \mapsto \mathbf{E}\left[\int_0^T \mathcal{Q}_s(x,y)\, dA_s\right] \in \mathbb{R}$ は continuous, symmetric, nonnegative-definite.
- $\langle M^x, M^y \rangle_t = \int_0^t \mathcal{Q}_s(x,y)\, dA_s, \quad x, y \in X.$

Simple integrand

Simple integrand:

$$H = \sum_{i=1}^{n} h^i \delta_{x^i}$$

(h^i: $\mathbb{R}$-valued bounded predictable process, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$)

H の $\mathbb{M}$ に関する確率積分を

$$\int H_s \, d\mathbb{M}_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int h_s^i \, dM_s^{x_i}$$

と定義する.

Simple integrand

$\int_0^\cdot H_s \, d\mathbb{M}_s \in \mathcal{H}^2$ かつ

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T H_s \, d\mathbb{M}_s\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_0^T \sum_{i,j=1}^n h_s^i h_s^j \, d\langle M^{x_i}, M^{x_j}\rangle_s\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_0^T \sum_{i,j=1}^n h_s^i h_s^j \mathcal{Q}_s(x_i, x_j) \, dA_s\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_0^T \langle H_s, \mathcal{Q}_s H_s\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}} \, dA_s\right]$$

が成立．ただし，conti. symm. nonnegative-def. $\mathcal{Q}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ に対し，linear map $\mathcal{Q}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ を次で定義;

$$(\mathcal{Q}\mu)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_X \mathcal{Q}(\cdot, y) \, \mu(dy), \ \ \mu \in \mathcal{M}.$$

Measure-valued integrand

integrand のクラスを拡張;

$$L^2(\mathbb{M},\mathcal{M}) = \left\{ H \,\middle|\, \begin{array}{c} H \text{ is an } \mathcal{M}\text{-valued predictable process s.t.} \\ \mathbf{E}\left[\int_0^T \langle H_s, \mathcal{Q}_s H_s\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}}\, dA_s\right]^{1/2} < \infty \end{array} \right\}.$$

- 各 $H \in L^2(\mathbb{M},\mathcal{M})$ に対し, 確率積分 $\int_0^\cdot H_s\, d\mathbb{M}_s \in \mathcal{H}^2$ が定義できる.
- quadratic variation: $\langle \int_0^\cdot H_s\, d\mathbb{M}_s\rangle_t = \int_0^t \langle H_s, \mathcal{Q}_s H_s\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}}\, dA_s$
- Measure-valued integrand は, Finance への応用の観点から自然なクラス.
- しかし, $L^2(\mathbb{M},\mathcal{M})$ はノルム $H \mapsto \mathbf{E}\left[\int_0^T \langle H_s, \mathcal{Q}_s H_s\rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}}\, dA_s\right]^{1/2}$ に関して完備でない.

Generalized integrand

Conti. symm. nonnegative-def. $\mathcal{Q}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ および対応する linear map $\mathcal{Q}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{M}/\mathrm{Ker}\mathcal{Q}$ 上の内積を

$$(\mu, \nu)_{U_{\mathcal{Q}}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mu, \mathcal{Q}\nu \rangle_{\mathcal{M},\mathcal{C}} \left(= \int_{X\times X} \mathcal{Q}(x,y)\, \nu(dy)\mu(dx) \right)$$

により定義. $\mathcal{M}/\mathrm{Ker}\mathcal{Q}$ のこの内積による completion を $U_{\mathcal{Q}}$ と書く.

- $U_{\mathcal{Q}}$ は separable Hilbert space.
- 上の操作により, 無限次元マルチンゲール $\mathbb{M} = \{M^x\}_{x\in X}$ および対応する covariance operator $\mathcal{Q}_{t,\omega}(x,y)$ に対し, 各 $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ 毎に Hilbert space $U_{t,\omega} = U_{\mathcal{Q}_{t,\omega}}$ が構成できる. (covariance spaces)
- Process $\mathbb{H} = (\mathbb{H}_t)_{t\in[0,T]}$ は各 $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$ に対し $\mathbb{H}_{t,\omega} \in U_{t,\omega}$ となるとき, U-valued であるという.

Generalized integrand

integrand のクラスをさらに拡張;

$$L^2(\mathbb{M}, U) = \left\{ \mathbb{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{H} \text{ is a } U\text{-valued predictable process s.t.} \\ \|\mathbb{H}\|_{\mathbb{M}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}\left[\int_0^T |\mathbb{H}_s|^2_{U_s}\, dA_s\right]^{1/2} < \infty \end{array} \right\}.$$

- $(L^2(\mathbb{M}, U), \|\cdot\|_{\mathbb{M}})$ は Hilbert space.
- 各 $\mathbb{H} \in L^2(\mathbb{M}, U)$ に対し, (一般化) 確率積分 $\int_0^\cdot \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s \in \mathcal{H}^2$ が定義できる.
- 等長性 $\left\| \int_0^\cdot \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s \right\|_{\mathcal{H}^2} = \|\mathbb{H}\|_{\mathbb{M}}$ が成立.
- $L^2(\mathbb{M}, U)$ の元は Finance などへの応用においてはそれ自身意味合いを持たない. ある意味で "合理的な" 近似列を構成する必要がある. $\rightsquigarrow$ BSDE によるアプローチ

1 無限次元確率積分

2 無限次元 BSDE
- 解の定義, 存在および一意性 (Theorem 1)
- 解の有限次元近似 (Theorem 2)

無限次元マルチンゲール $\mathbb{M} = \{M^x\}_{x \in X}$ は前と同様 (given).
ドライバー f および終端条件 ξ が与えられたとき, BSDE(f, ξ);

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{H}_s)\, dA_s - \int_t^T \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s - \int_t^T dN_s, \quad t \in [0, T]$$

を満たす適当な triplet $(Y, \mathbb{H}, N)$ を求めたい.

BSDE(f, ξ) の Finance における解釈 $\cdots$

- ξ: クレーム ($\mathcal{F}_T$-可測確率変数)
- f: コスト関数
- Y: クレーム ξ の "価格過程" (adapted process)
- $\mathbb{H}$: (一般化) 投資戦略
- N: cost process

金利マーケットなどの無限次元マーケットモデルにおけるクレームのヘッジ問題に応用可能.

BSDE(f,ξ);

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{H}_s)\, dA_s - \int_t^T \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s - \int_t^T dN_s, \ \ t \in [0, T]$$

Assumption

- $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$
- f は $\{(\omega, s, y, h) \mid \omega \in \Omega,\ \ s \in [0, T],\ \ y \in \mathbb{R},\ \ h \in U_{s,\omega}\}$ 上の (適当な可測性を満たす) 実数値関数, 次を仮定する;
  1. $\mathbf{E}\left[\int_0^T f(\omega, t, 0, 0)^2\, dA_t(\omega)\right] < \infty.$
  2. $\exists \eta, \theta$: positive, bounded, predictable processes s.t.
  $$|f(t, y_1, \mathbb{K}_t^1) - f(t, y_2, \mathbb{K}_t^2)| \le \eta_t |y_1 - y_2| + \theta_t |\mathbb{K}_t^1 - \mathbb{K}_t^2|_{U_t}$$
  for any $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ and U-valued processes $\mathbb{K}^1, \mathbb{K}^2$.

上の仮定を満たす (f,ξ) を standard data と呼ぶ.

BSDE(f,ξ);

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{H}_s)\, dA_s - \int_t^T \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s - \int_t^T dN_s,\ \ t \in [0, T]$$

Definition

(f,ξ): *standard data.*
次を満たす *triplet* $(Y, \mathbb{H}, N)$ を *BSDE*(f,ξ) の解と呼ぶ;

- $Y : \mathbb{R}$*-valued càdlàg adapted,* $\mathbf{E}\left[\int_0^T Y_t^2\, dA_t\right] < \infty$.
- $\mathbb{H} \in L^2(\mathbb{M}, U)$
- $N \in \mathcal{H}^2$, *strongly orthogonal to* $\mathbb{M} = \{M^x\}_{x\in X}$.
  (i.e. $\langle N, M^x\rangle \equiv 0,\ \forall x \in X$*)*
- $(Y, \mathbb{H}, N)$ は方程式 *BSDE*(f,ξ) を満たす.

BSDE(f,ξ);

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, \mathbb{H}_s)\, dA_s - \int_t^T \mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s - \int_t^T dN_s,\ \ t \in [0, T]$$

Theorem 1 (解の存在および一意性, H. 2018)

(f,ξ): *standard data* に対し, *BSDE*(f,ξ) の解 $(Y,\mathbb{H},N)$ が一意的に存在する.

Remark (Economic interpretation)

$\mathbb{H} \in L^2(\mathbb{M}, U)$ は無限次元マーケットにおけるクレーム ξ の「一般化ヘッジ戦略」とみなすことができるが, 通常の意味での「投資戦略」の意味合いを持たない. そのため, Finance への応用の観点から, 適当な投資戦略の列により $\mathbb{H}$ を近似することが求められる.

解の有限次元近似

目標

対応する有限次元マルチンゲールにより駆動する BSDE の解により, 元の無限次元 BSDE の解を近似したい.

$\{x_1, x_2, \dots\}$ を X の可算稠密集合とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, n 次元二乗可積分マルチンゲール

$$\mathbb{M}^n \stackrel{\text{def}}{=} (M^{x_1}, \dots, M^{x_n})$$

を考える.

- $\mathbb{M}^n$-可積分な (n 次元) 可予測過程の集合を $L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$ と表す. 各 $H \in L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$ に対し, 有限次元ベクトル確率積分 $\int_0^{\cdot} H_s \, d\mathbb{M}_s^n \in \mathcal{H}^2$ が定義できる.

Lemma

$n \in \mathbb{N}$: fix.
各 $H = (H^1, \ldots, H^n) \in L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$ に対し, *measure-valued integrand* $\tilde{H} = \sum_{i=1}^n H^i \delta_{x_i}$ を考えると, $\tilde{H}$ は $L^2(\mathbb{M}, U)$ の元であり,

$$\int_0^\cdot H_s \, d\mathbb{M}_s^n = \int_0^\cdot \tilde{H}_s \, d\mathbb{M}_s$$

が成立する. この対応により, $L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$ は $L^2(\mathbb{M}, U)$ の閉部分空間とみなせる.

$n \in \mathbb{N}$: fix.
Standard data (f, ξ) に対し, 次の BSDE$^n(f,\xi)$ を考える;

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, H_s^n)\, dA_s - \int_t^T H_s^n\, d\mathbb{M}_s^n - \int_t^T dN_s^n, \quad t \in [0, T]$$

Definition

$n \in \mathbb{N}$, (f, ξ): *standard data.*
次を満たす *triplet* (Y^n, H^n, N^n) を *BSDE*$^n(f,\xi)$ の解と呼ぶ;

- Y^n: $\mathbb{R}$*-valued càdlàg adapted,* $\mathbf{E}\left[\int_0^T (Y_t^n)^2\, dA_t\right] < \infty$.
- $H^n \in L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$
- $N^n \in \mathcal{H}^2$, *strongly orthogonal to* $\mathbb{M}^n = (M^{x_1}, \ldots, M^{x_n})$.
  (*i.e.* $\langle N, M^{x_i}\rangle \equiv 0, \ i = 1, \ldots, n$)
- (Y^n, H^n, N^n) は方程式 *BSDE*$^n(f,\xi)$ を満たす.

$\rightsquigarrow$ 解の存在, 一意性
(c.f. Carbone, Ferrario, and Santacroce, 2007).

Theorem 2 (解の有限次元近似, H. 2018)

(f, ξ): *standard data.*
$(Y, \mathbb{H}, N)$ を $BSDE(f, \xi)$ の解とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し (Y^n, H^n, N^n) を $BSDE^n(f, \xi)$ の解とする．このとき次が成立する;

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Y^n &= Y \quad \text{in } L^2(dA_t \otimes d\mathbf{P}), \\
\lim_{n\to\infty} H^n &= \mathbb{H} \quad \text{in } L^2(\mathbb{M}, U), \\
\lim_{n\to\infty} N^n &= N \quad \text{in } \mathcal{H}^2.
\end{aligned}$$

さらに，ある定数 $\gamma > 0$ が存在し，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\|Y - Y^n\|^2_{L^2(dA_t \otimes d\mathbf{P})} + \|\mathbb{H} - H^n\|^2_{\mathbb{M}} \leq \gamma \|N - N^n\|^2_{\mathcal{H}^2}$$

が成立する．

Remark (Economic interpretation)

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{M}^n = (M^{x_1}, \dots, M^{x_n})$ は "n-th small market" (元の無限次元マーケット $\mathbb{M}$ に対する近似的な有限次元マーケット), $L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$ の元は有限次元投資戦略とみなせる.
- $\mathrm{BSDE}^n(f, \xi)$ の解 (Y^n, H^n, N^n) において, H^n は n-th small market における "(局所的) リスク最小戦略" と対応する (c.f. Schweizer, 2008).
- Theorem 2 により, 無限次元マーケットにおけるクレームの形式的なヘッジ戦略が, 各 small market における (リスク最小化の意味で) 最適な投資戦略の列で近似されることがわかる.

証明の概略, 1/5

- $\alpha_t^2 = 1 + \eta_t + \theta_t^2$, $K_t = \int_0^t \alpha_s^2 \, dA_s$ と置き, 定数 $\beta > 0$ (後に定める) に対し, $L^2(dA_t \otimes d\mathbf{P})$ におけるノルム

$$\|X\|_{T,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t} |X_t|^2 \, dA_t\right]^{1/2}$$

  を考える. $\|\cdot\|_{\mathbb{M},\beta}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2,\beta}$ も同様に定義する.
- $\delta_n Y = Y - Y^n$, $\delta_n \mathbb{H} = \mathbb{H} - H^n$, $\delta_n N = N - N^n$ と置く.
- α, K の有界性に注意して,

$$\|\alpha \delta_n Y\|_{T,\beta}^2 + \|\delta_n \mathbb{H}\|_{\mathbb{M},\beta}^2 + \|\delta_n N\|_{\mathcal{H}^2,\beta}^2$$

  を評価すればよい.

証明の概略, 2/5

$e^{\beta K_t}|\delta_n Y_t|^2$ に対し伊藤の公式を適用;

$$\mathbf{E}\left[e^{\beta K_T}|\delta_n Y_T|^2\right] - \mathbf{E}\left[|\delta_n Y_0|^2\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t}(\beta\alpha_t^2|\delta_n Y_t|^2 - 2\delta_n Y_t(f(t, Y_t, \mathbb{H}_t) - f(t, Y_t^n, H_t^n)))\, dA_t\right]$$

$$+ \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t}\left(|\delta_n \mathbb{H}_t|_{U_t}^2\, dA_t + d\langle\delta_n N\rangle_t + 2d\left\langle\int_0^\cdot \delta_n\mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s, \delta_n N\right\rangle_t\right)\right]$$

整理すると $\cdots$

$$\beta\|\alpha\delta_n Y\|_{T,\beta}^2 + \|\delta_n\mathbb{H}\|_{\mathbb{M},\beta}^2 + \|\delta_n N\|_{\mathcal{H}^2,\beta}^2$$

$$\le \mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t} 2|\delta_n Y_t|\cdot|f(t, Y_t, \mathbb{H}_t) - f(t, Y_t^n, H_t^n)|\, dA_t\right] \quad ①$$

$$+ 2\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t}\left|d\left\langle\int_0^\cdot \delta_n\mathbb{H}_s\, d\mathbb{M}_s, \delta_n N\right\rangle_t\right|\right] \quad ②$$

証明の概略, 3/5

① $\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t} 2|\delta_n Y_t| \cdot |f(t, Y_t, \mathbb{H}_t) - f(t, Y_t^n, H_t^n)|\, dA_t\right]$

f の Lipschitz 条件および不等式

$$2ab \leq \mu^2 a^2 + \frac{b^2}{\mu^2} \text{ for all } a, b \in \mathbb{R} \text{ and } \mu > 0$$

を用いて, 任意の $\mu > 0$ に対し

$$① \leq (2 + \mu^2)\|\alpha \delta_n Y\|_{T,\beta}^2 + \frac{1}{\mu^2}\|\delta_n \mathbb{H}\|_{\mathbb{M},\beta}^2$$

が成立.

証明の概略, 4/5

② $2\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t}\left|d\left\langle\int_0^\cdot \delta_n\mathbb{H}_s\,d\mathbb{M}_s, \delta_n N\right\rangle_t\right|\right]$

$\widehat{\mathbb{H}}^n_{s,\omega}$ を "$\mathbb{H}_{s,\omega}$ の $U_{s,\omega}$ における $(\mathrm{span}\{\delta_{x_1},\dots,\delta_{x_n}\})^\perp$ への直行射影" とする.
$\rightsquigarrow$ $\widehat{\mathbb{H}}^n \in L^2(\mathbb{M}, U)$, $\mathbb{H}-\widehat{\mathbb{H}}^n \in L^2(\mathbb{M}^n, \mathbb{R}^n)$

$\delta_n N = N - N^n$ が $\mathbb{M}^n = (M^{x_1},\dots,M^{x_n})$ と strongly orthogonal であることより,

$$\left\langle\int_0^\cdot \delta_n\mathbb{H}_s\,d\mathbb{M}_s, \delta_n N\right\rangle = \left\langle\int_0^\cdot \widehat{\mathbb{H}}^n_s\,d\mathbb{M}_s, \delta_n N\right\rangle.$$

上の等式および Kunita–Watanabe ineq. などを用いて,

$$② \le 2\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t}|\widehat{\mathbb{H}}^n_t|^2_{U_t}\,dA_t\right] + \frac{1}{2}\|\delta_n N\|^2_{\mathcal{H}^2,\beta}.$$

証明の概略, 5/5

まとめると $\cdots$
任意の β, $\mu > 0$ および $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$(\beta - 2 - \mu^2) \|\alpha\delta_n Y\|^2_{T,\beta} + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \|\delta_n \mathbb{H}\|^2_{\mathbb{M},\beta} + \frac{1}{2}\|\delta_n N\|^2_{\mathcal{H}^2,\beta}$$
$$\leq 2\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t} |\widehat{\mathbb{H}}^n_t|^2_{U_t}\, dA_t\right].$$

($\beta > 3$ のとき, 適当な $\mu > 0$ に対し, 各項の係数 > 0 とできる.)

$\lim_{n\to\infty} |\widehat{\mathbb{H}}^n_{t,\omega}|_{U_{t,\omega}} = 0$, $\forall t, \omega$, および
$e^{\beta K_t}|\widehat{\mathbb{H}}^n_t|^2_{U_t} \leq e^{\beta K_t}|\mathbb{H}_t|^2_{U_t} \in L^1(dA_t \otimes d\mathbf{P})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ より,

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T e^{\beta K_t} |\widehat{\mathbb{H}}^n_t|^2_{U_t}\, dA_t\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- R. Carbone, B. Ferrario, and M. Santacroce. Backward stochastic differential equations driven by càdlàg martingales. Teor. Veroyatn. Primen., 52(2):375–385, 2007.
- M. De Donno and M. Pratelli. On the use of measure-valued strategies in bond markets. Finance Stoch., 8(1):87–109, 2004.
- Y. Hamaguchi. BSDEs driven by cylindrical martingales with application to approximate hedging in bond markets. ArXiv e-prints, June 2018.
- M. Schweizer. Local risk-minimization for multidimensional assets and payment streams. In Advances in mathematics of finance, volume 83 of Banach Center Publ., pages 213–229. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008.