L^2-canonical Lévy 過程に対する Malliavin-Skorohod 解析と関連する話題 確率論ヤングサマーセミナー

鈴木良一[1]

慶應義塾大学理工学部数理科学科

2018/8/20

[1]e-mail: rsuzukimath@gmail.com,
website: https://sites.google.com/site/ryoichisuzukifinance/

本講演の目標

- L^2-canonical Lévy 過程に対する Malliavin-Skorohod 解析の紹介.
- Malliavin 解析とは, 1970 年代に P. Malliavin によって提唱された Wiener 空間上の微積分理論.
- Malliavin 解析の応用例: 数理ファイナンス, 確率 (偏) 微分方程式の基本解の確率密度関数の存在性と滑らかさ, 4 次モーメント定理 等たくさん.
- 今回は, canonical Lévy 過程という Brown 運動, Poisson 過程等を含む Malliavin 解析の理論構築に有用な Lévy 過程のクラスに対して行う.
- canonical Lévy 空間のメリット:
  - Lévy 過程が定義される標準的な空間
  - Wiener 方向の Malliavin 微分と canonical 空間上の弱微分との一致性
  - 差分商作用素とジャンプ方向の Malliavin 微分との一致性
  - Wiener 空間や Poisson 空間を含むクラス

  など Malliavin 微分の計算に有用な性質が多い.
- 関連する話題として, Clark-Ocone 型公式から対数 Sobolev 不等式を導き, その応用として測度集中の不等式を示す.

Lévy 過程

Lévy 過程

Definition 1

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定義された $\mathbb{R}$ 値の確率過程 $\{X_t; t \geqslant 0\}$ が，次の 5 条件 (1)–(5) をみたすとき，Lévy 過程という.

1. 独立増分性: 任意の $n \geqslant 1$ と任意の $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が独立.
2. $X_0 = 0$ a.s.
3. 確率連続性: $\forall t \geqslant 0$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0$.
4. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ をみたす $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ が存在して，$\forall \omega \in \Omega_0$ に対し，$X_t(\omega)$ は t について右連続で左極限をもつ.
5. 時間的一様性: $\forall s \geqslant 0$ に対して，$X_{t+s} - X_t$ の分布は t に依存しない.

(1)–(4) をみたすとき，加法過程という.

Lévy-Khintchine 表現

Proposition 1.1 (Lévy-Khintchine 表現)

$\{X_t; t \geqslant 0\}$ が *Lévy* 過程のとき，$\sigma^2 \geqslant 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ と 次をみたす *Lévy* 測度 ν が一意に存在して，

$$\nu(\{0\}) = 0 \textit{ and } \int_{\mathbb{R}} \min(1, |z|^2)\nu(dz) < \infty,$$

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp\left(t\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + i\gamma u + \int_{\mathbb{R}_0}(e^{iuz} - 1 - iuz\mathbf{1}_{|z|<1})\nu(dz)\right)\right) \tag{1}$$

とかける．ただし，$\mathbb{R}_0$ は $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ である．逆に上の性質をみたす (γ, σ, ν) を任意に与えたとき，特性関数が (1) で表されるような *Lévy* 過程が存在する．

三つ組 (γ, σ, ν) を Lévy 過程 $\{X_t; t \geqslant 0\}$ の生成要素と呼ぶ．

Lévy-Itô 分解

$\{X_t; t \geqslant 0\}$ を Lévy 過程とする. $\Delta X_s := X_s - X_{s-}$ とする.

- N: $N(t, A) := \sum_{s \leqslant t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s) (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0), \forall t \in [0, T])$ で定まる Poisson ランダム測度
- $\nu(A) = \mathbb{E}[N(1, A)], \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$: Lévy 測度.
- $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)dt$: Poisson ランダム測度 N の compensated measure
- $\{W_t; t \geqslant 0\}$: $W_0 = 0$ a.s. をみたす標準 Brown 運動.

Proposition 1.2 (Lévy-Itô 分解)

$\{X_t; t \geqslant 0\}$ が *Lévy* 過程のとき, 生成要素 (γ, σ, ν) が一意に定まり,

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z|\geqslant 1} zN(ds, dz)$$

と書ける.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin-Skrohod 解析

準備： canonical Lévy 過程

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析を Solé et al. (2007), Delong-Imkeller (2010), Suzuki (2013,2014)) の流儀に従って導入する．$\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする．まず Wiener 空間と canonical pure jump Lévy 空間から確率空間を構成する．

- $T > 0$
- $(\Omega_W, \mathcal{F}_W, \mathbb{P}_W)$: $[0, T]$ 上の 1 次元 Wiener 空間
- W: 0 を出発する 1 次元標準 Brown 運動
- $(\Omega_J, \mathcal{F}_J, \mathbb{P}_J)$: $[0, T]$ 上の Lévy 測度 ν をもつ pure jump Lévy 過程 J による canonical Lévy space とする．すなわち，$\Omega_J = \cup_{n=0}^{\infty}([0, T] \times \mathbb{R}_0)^n$,

$$J_t(\omega_J) = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{1}_{\{t_i \leqslant t\}}, \quad t \in [0, T]$$

  $\omega_J = ((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) \in ([0, T] \times \mathbb{R}_0)^n$ とする．ここで $([0, T] \times \mathbb{R}_0)^0$ は空の列とする．
- 本講演では常に $\int_{\mathbb{R}_0} z^2 \nu(dz) < \infty$ を仮定する．

準備: canonical Lévy 過程

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_W \times \Omega_J, \mathcal{F}_W \times \mathcal{F}_J, \mathbb{P}_W \times \mathbb{P}_J)$ を canonical 空間と呼ぶ.
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ を $\mathbb{P}$ について完備化された canonical filtration とする.

この設定のもとで $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の中心化された二乗可積分な Lévy 過程 $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ に対して Lévy-伊藤分解より

$$X_t = \sigma W_t + J_t - t\int_{\mathbb{R}_0} z\nu(dz). \tag{2}$$

ここで $\sigma \geqslant 0$ である. $\Delta X_s := X_s - X_{s-}$ とする.

- N: $N(t, A) := \sum_{s\leqslant t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s)(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0), \forall t \in [0, T])$ で定まる Poisson ランダム測度
- $\tilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \nu(dz)dt$: Poisson ランダム測度 N の compensated measure

上記の X_t の表現は compensated measure $\tilde{N}$ を用いて

$$X_t = \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z\tilde{N}(ds, dz). \tag{3}$$

準備: Wiener-Itô カオス展開

次にカオス展開に用いる測度を与える.

- $q(E) = \sigma^2 \int_{E(0)} dt\delta_0(dz) + \int_{E'} z^2 dt\nu(dz), \qquad E \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$
  を $[0,T] \times \mathbb{R}$ で定義される有限測度. ここで,
  $E(0) = \{(t,0) \in [0,T] \times \mathbb{R}; (t,0) \in E\}$, $E' = E - E(0)$.
- $Q(E) = \sigma \int_{E(0)} dW_t\delta_0(dz) + \int_{E'} z\tilde{N}(dt,dz), \qquad E \in \mathcal{B}([0,T] \times \mathbb{R})$.
  を $[0,T] \times \mathbb{R}$ 上のランダム測度
- $L^2_{T,q,n} := \{h : ([0,T] \times \mathbb{R})^n \to \mathbb{R}; \|h\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty\}$, ここで,

  $$\|h\|^2_{L^2_{T,q,n}} = \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} |h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n))|^2 q(dt_1,dz_1)\cdots q(dt_n,dz_n).$$

- $n \in \mathbb{N}$ と $h_n \in L^2_{T,q,n}$ に対して,

  $$I_n(h_n) := \int_{([0,T]\times\mathbb{R})^n} h((t_1,z_1),\cdots,(t_n,z_n)) Q(dt_1,dz_1)\cdots Q(dt_n,dz_n).$$

準備: Wiener-Itô カオス展開

Proposition 2.1 (多重確率積分の性質, Itô (1956))

1. $n \geqslant 1, f \in L^2_{T,q,n}$, に対して, $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$ となる. ただし, $\tilde{f}$ は f の対称化:

$$\tilde{f}((t_1, z_1), \cdots, (t_n, z_n)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{D}_n} f((t_{\pi(1)}, z_{\pi(1)}), \cdots, (t_{\pi(n)}, z_{\pi(n)})),$$

ここで, $\mathcal{D}_n$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の *permutation* の集まり.

2. $n \geqslant 1, a, b \in \mathbb{R}, f, g \in L^2_{T,q,n}$ に対して, $I_n(af + bg) = aI_n(f) + bI_n(g)$.

3. $m, n \geqslant 1, f \in L^2_{T,q,n}, g \in L^2_{T,q,m}$ は n 組の $(t_i, z_i), 1 \leqslant i \leqslant n$ について対称, つまり, $f = \tilde{f}$ *and* $g = \tilde{g}$ であるとき,

$$\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)] = n!\mathbf{1}_{(n=m)}\langle f, g\rangle_{L^2_{T,q,n}}.$$

準備: Wiener-Itô カオス展開

この設定のもとでランダム測度 Q についての Wiener-Itô カオス展開が以下のように成り立つ: (Solé et al. (2007) 2 節と Delong and Imkeller (2010) 3 節を参照).

Theorem 2.2 (Itô (1956))

canonical 空間上の任意の $\mathcal{F}$-可測な二乗可積分な確率変数 F は次の表現を一意にもつ: ある n 個の組 $(t_i, z_i), 1 \leqslant i \leqslant n$ について対称な関数 $h_n \in L^2_{T,q,n}$ が存在して

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n), \mathbb{P} - \text{a.s.}.$$

さらに

$$\mathbb{E}[F^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}}.$$

を満たす.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Malliavin 微分の定義

Definition 2

1. Stochastic Sobolev 空間 $\mathbb{D}^{1,2}$ を $\mathcal{F}$ -可測な確率変数 $F \in L^2(\mathbb{P})$ で $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ という表現をもち,
$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty.$$
をみたすもの全体の集合とする.
2. $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ とする. 確率変数 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ の Malliavin 微分 $DF : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は
$$D_{t,z}F = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(h_n((t,z),\cdot)),\ q-\text{a.e. } (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{P}-a.s.$$
で定義される確率過程である.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Malliavin 微分の定義

Definition 3

$\sigma \neq 0$, に対して $\mathbb{D}_0^{1,2}$ を $\mathcal{F}$ -可測な確率変数 $F \in L^2(\mathbb{P})$ で $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ という表現をもち，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n n! \int_0^T \|h_n(\cdot, (t,0))\|^2_{L^2_{T,q,n-1}} \sigma^2 dt < \infty$$

をみたすもの全体の集合とする．このとき，$F \in \mathbb{D}_0^{1,2}$, に対して

$$D_{t,0}F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(h_n((t,0),\cdot)), \quad q\text{−a.e. } (t,0) \in [0,T] \times \{0\}, \mathbb{P} - a.s.$$

が定義できる．

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Malliavin 微分の定義

Definition 4

$\nu \neq 0$, に対して，$\mathbb{D}_1^{1,2}$ を $\mathcal{F}$ -可測な確率変数 $F \in L^2(\mathbb{P})$ で $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ という表現をもち，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \|h_n(\cdot,(t,z))\|^2_{L^2_{T,q,n-1}} z^2 \nu(dz)dt < \infty$$

をみたすもの全体の集合とする．このとき，$F \in \mathbb{D}_1^{1,2}$ に対して，

$$D_{t,z}F = \sum_{n=1}^{\infty} nI_{n-1}(h_n((t,z),\cdot)),\ q\text{-a.e. } (t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}_0, \mathbb{P} - a.s.$$

が定義できる．

$\mathbb{D}^{1,2} = \mathbb{D}_0^{1,2} \cap \mathbb{D}_1^{1,2}$ となる．

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Ornstein-Uhlenbeck 作用素

Definition 5 (Ornstein-Uhlenbeck 作用素)

1. Dom L を $\mathcal{F}$ -可測な確率変数 $F \in L^2(\mathbb{P})$ で $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ という表現をもち,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 n! \|h_n\|^2_{L^2_{T,q,n}} < \infty.$$

をみたすもの全体の集合とする.

2. $F \in \mathrm{Dom}\, L$ に対して, F の Ornstein-Uhlenbeck 作用素 LF を

$$LF := -\sum_{n=1}^{\infty} n I_n(h_n)$$

で定義する.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Ornstein-Uhlenbeck 半群

Definition 6

$F=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n)$ という表現を持つ $F \in L^2(\mathbb{P})$ に対して, Ornstein-Uhlenbeck 半群 $P_s F$ を

$$P_s F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} s^n I_n(h_n), s \in [0,1]$$

と定義する.

Skorohod 積分

Definition 7

1. 任意の確率過程 $u \in L^2(q \times \mathbb{P})$ はカオス展開 $u_{t,z} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n(\cdot,(t,z)))$ を持つことに注意する．ただし，$h_n \in L^2_{T,q,n+1}$ は最初の n 組の変数に関して対称である．$\hat{h}_n$ を h_n の $n+1$ 組のすべての変数に関する対称化とし，

$$\mathrm{Dom}_\delta := \left\{ u \in L^2(q \times \mathbb{P}) \middle| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \|\hat{h}_n\|^2_{L^2_{T,q,n+1}} < \infty \right\}.$$

2. $u \in \mathrm{Dom}_\delta$ とする．確率過程 $u : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のランダム測度 Q に関する Skorohod 積分 δ を

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\hat{h}_n), \ \mathbb{P}\text{−a.s.}$$

で定義する．

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: D, L, δ の関係

次の結果は Malliavin 微分 D, Ornstein-Uhlenbeck 作用素 L と Skorohod 積分 δ の繋がりを示している.

Proposition 2.3

$F \in L^2(\mathbb{P})$ とすると, $F \in \mathrm{Dom}\ L$ となるための必要十分条件は $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ と $DF \in \mathrm{Dom}_\delta$ が成り立つことである. このケースでは

$$\delta(DF) = -LF$$

となる.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: 部分積分公式

次の命題は部分積分公式と呼ばれるものである.

Proposition 2.4 (部分積分公式, Solé et al. (2007))

確率過程 $u \in L^2(q \times \mathbb{P})$ が Dom_δ の要素である必要十分条件は任意の $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して

$$\left| \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} u_{s,x} D_{s,x} F q(ds,dx) \right] \right| \leqslant C(\mathbb{E}[F^2])^{1/2}$$

をみたす定数 C が存在することである.
$u \in \mathrm{Dom}_\delta$ であるとき, $\delta(u)$ は任意の $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ に対して

$$\mathbb{E}[\delta(u)F] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} u(s,x) D_{s,x} F q(ds,dx) \right]$$

をみたす $L^2(\mathbb{P})$ の要素として特徴付けられる.

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Skorohod 積分の共分散, 微分公式 1

Definition 8

$\mathbb{L}^{1,2}$ を次を満たす確率過程 $u : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の集合とする:

$$\mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} |u_{s,x}|^2 q(ds, dx)\right] < \infty,$$

$$u_{s,x} \in \mathbb{D}^{1,2},\ q\text{−a.e. } (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}\left[\int_{([0,T]\times\mathbb{R})^2} |D_{t,z} u_{s,x}|^2 q(ds, dx) q(dt, dz)\right] < \infty.$$

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Skorohod 積分の共分散, 微分公式 2

Proposition 2.5 (Solé et al. (2007))

1. δ の共分散: $\mathbb{L}^{1,2} \subset \mathrm{Dom}_\delta$ かつ, $u, v \in \mathbb{L}^{1,2}$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\delta(u)\delta(v)] =& \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} u_{s,x} v_{s,x} q(ds, dx)\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[\int_{([0,T]\times\mathbb{R})^2} D_{t,z} u_{s,x} \cdot D_{t,z} v_{s,x} q(ds, dx) q(dt, dz)\right]\end{aligned}$$

が成り立つ.

2. δ の微分公式: $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ かつ $D_{t,z} u \in \mathrm{Dom}_\delta$, $\forall (t, z)$, q-a.e. のとき, $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ と

$$D_{t,z}\delta(u) = u_{t,z} + \delta(D_{t,z} u)$$

が成り立つ.

Skorohod 積分は Itô 積分の拡張

Proposition 2.6 (Solé et al. (2007))

確率過程 $u \in L^2(q \times \mathbb{P})$ が可予測，すなわち

$$A \times (s, u] \times B, \ A \in \mathcal{F}_s, \ 0 \leqslant s < u, \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_0)$$

から生成される σ-algebra に対して可測であるとき，$u \in \mathrm{Dom}_\delta$ かつ

$$\delta(u) = \int_{[0,T] \times \mathbb{R}} u_{s,x} Q(ds, dx)$$

が成り立つ．

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: 連鎖律

Proposition 2.7 (連鎖率 (Chain rule))

$\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ とし，$F=(F_1,\cdots,F_n)$，$F_1,\cdots,F_n\in\mathbb{D}^{1,2}$ とする．さらに，$\varphi(F)\in L^2(\mathbb{P})$ と

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(F)D_{t,0}F_k\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{\varphi(F_1+zD_{t,z}F_1,\cdots,F_n+zD_{t,z}F_n)-\varphi(F_1,\cdots,F_n)}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z)\in L^2(q\times\mathbb{P})$$

を仮定する．このとき，$\varphi(F)\in\mathbb{D}^{1,2}$ で

$$D_{t,z}\varphi(F)=\sum_{k=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(F)D_{t,0}F_k\mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{\varphi(F_1+zD_{t,z}F_1,\cdots,F_n+zD_{t,z}F_n)-\varphi(F_1,\cdots,F_n)}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z).$$

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Clark-Ocone 型公式

Malliavin 解析を使った明示的なマルチンゲール表現公式である Clark-Ocone 型公式を紹介する.

Proposition 2.8 (Clark-Ocone type formula for canonical Lévy functionals)

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ とすると

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F] + \delta(\mathbb{E}[D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]) \\ &= \mathbb{E}[F] + \int_{[0,T]\times\mathbb{R}} \mathbb{E}[D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]Q(dt,dz) \\ &= \mathbb{E}[F] + \sigma\int_0^T \mathbb{E}[D_{t,0}F|\mathcal{F}_{t-}]dW_t + \int_0^T\int_{\mathbb{R}_0} \mathbb{E}[D_{t,z}F|\mathcal{F}_{t-}]z\tilde{N}(dt,dz) \end{aligned}$$

が成立する.

対数 Sobolev 不等式と測度集中不等式について

Capitaine, Hsu and Ledoux (1997) の仕事 I

対数 Sobolev 不等式の原点は Gross (1976)
Wiener 汎関数 F に対して

$$\mathbb{E}[F^2 \log F^2] - \mathbb{E}[F^2] \log \mathbb{E}[F^2] \leqslant 2\mathbb{E}[\|DF\|_{\mathbb{H}}^2] = 2\mathcal{E}(F,F).$$

- 対数 Sobolev 不等式は空間の次元に依存せず, 超縮小性と同値.
- 対数 Sobolev 不等式から次のスペクトルギャップの不等式を導出:

$$\mathbb{E}[F^2] - (\mathbb{E}[F])^2 \leqslant \mathbb{E}[\|DF\|_{\mathbb{H}}^2] = \mathcal{E}(F,F).$$

- Wiener 空間上の Poincare の不等式と対数 Sobolev 不等式のシンプルな証明を Clark-Ocone の公式を用いて与えた.

Capitaine, Hsu and Ledoux (1997) の仕事 II

- Clark-Ocone の公式とは，Malliavin 微分を使った確率変数の明示的なマルチンゲール表現公式である:

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t^W F | \mathcal{F}_t] dW_t.$$

- Banach 空間に加え，多様体上の道の空間の上での Poincare の不等式，対数 Sobolev 不等式，等周不等式を多様体上の Clark-Ocone 公式を用いて与えた.
- この Clark-Ocone 公式を用いて明示的なマルチンゲール表現公式を与えることで対数 Sobolev 不等式を示す，というやり方は汎用性が高い手法として現在認識されている.

Wu (2000) による修正対数 Sobolev 不等式

- Surgailis (1984) は Poisson 空間上の対数 Sobolev 不等式に対する反証をあげている. つまり

  $$\exists C(2) > 0,\ \forall F \in L^2(\mathbb{P}): \quad \mathbb{E}[F^2 \log F^2] - \mathbb{E}[F^2] \log \mathbb{E}[F^2] \leqslant C(2) \cdot \mathcal{E}_{Poi}(F, F)$$

  が成り立たない. π_θ を $\mathbb{N}$ 上のパラメーター $\theta > 0$ を持つ Poisson 測度とすると, $L^2(N; \pi_\theta)$ 上の Dirichlet 形式は

  $$\mathcal{E}_{Poi}(f, g) := \int_N (D^\pi f \cdot D^\pi g) d\pi_\theta,$$

  ただし,

  $$D^\pi f(x) := f(x+1) - f(x), \forall x \in \mathbb{N}.$$

- それに対して, Wu は Poisson 空間上の Clark-Ocone の公式を用いて, Poisson 空間上の修正対数 Sobolev 不等式を導いた：

  $$\mathbb{E}[\Psi(F)] - \Psi(\mathbb{E}[F]) \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (D^J_{(t,z)}\Psi(F) - \Psi'(F) D^J_{(t,z)} F)\nu(dz)dt\right]$$

  ただし, $\Psi(x) = x \log x$, $x > 0$.

- Bourguin-Peccati (2016) は Mehler の公式を用いた直接的な証明を与えている.

対数 Sobolev 不等式の重要な応用例

対数 Sobolev 不等式から次のような不等式を導くことができる.

Wiener 空間の測度集中の不等式

$$\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) \leqslant \exp\left[-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right], \forall r > 0,$$

where

$$\sup_{\omega \in \Omega} \int_0^T |D_t^W F|^2 dt = \alpha^2 < \infty.$$

Bachmann and Peccatti の近年の仕事

前述の Wu が示した不等式の応用として

- 対象： Poisson 汎関数
- 結果： 測度集中不等式:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F-\mathbb{E}[F]>r) &\leqslant \exp\left[-\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda r-\frac{\gamma^2}{\beta^2}(e^{\lambda\beta}-\lambda\beta-1)\right\}\right] \\ &= \exp\left[-\left(\frac{r}{\beta}+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\log\left(1+\frac{\beta r}{\gamma^2}\right)+\frac{r}{\beta}\right] \\ &\leqslant \exp\left[-\frac{r}{2\beta}\log\left(1+\frac{\beta r}{\gamma^2}\right)\right].\end{aligned}$$

- 手法： Poisson ランダム測度の対数 Sobolev 不等式と Herbst 法の組み合わせ

canonical Lévy 過程に対する Malliavin 解析: Poincare 型不等式

Proposition 2.8 を使うと, 次の Poincare 型不等式を導出できる.

Proposition 3.1 (Spectral gap inequality or Poincare inequality)

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ とすると,

$$\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^2] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} |D_{t,z}F|^2 q(dt, dz)\right]$$

が成り立つ.

canonical Lévy 過程に対する修正された対数 Sobolev 不等式

この節では, canonical Lévy 過程に対する修正された対数 Sobolev 不等式を紹介する.

Theorem 4.1 (Sakuma-Suzuki (2018))

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ を確率 1 で $F > 0$ をみたすものとする. このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}[F] &= \mathbb{E}[\Psi(F)] - \Psi(\mathbb{E}[F]) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F}|D_{t,0}F|^2 dt\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (D_{t,z}\Psi(F) - \Psi'(F)D_{t,z}F) z\nu(dz)dt\right]\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\Psi(x) = x\log x$ *for* $x > 0$.

注意: $F > 0$ $\mathbb{P}$-a.s. と $F \in L^1(\mathbb{P})$ をみたす確率変数 F に対して, F のエントロピーを $\mathrm{Ent}[F] := \mathbb{E}[F\log F] - \mathbb{E}[F]\log\mathbb{E}[F]$ と定義する.

系として得られる不等式

Theorem 4.1 と Malliavin 微分の性質から, 次の結果がすぐに得られる.

Corollary 5.1

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ を確率 1 で $F > 0$ をみたすものとし, $\Psi(x) = x \log x$ *for* $x > 0$ とする. このとき, 次のことがわかる:

1. $\nu = 0$ かつ $\sigma \neq 0$ であるとき

$$\mathrm{Ent}[F] \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F}|D_t^W F|^2 dt\right] \tag{4}$$

   が成り立つ.

2. $\sigma = 0$ かつ $\nu \neq 0$ であるとき,

$$\mathrm{Ent}[F] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (D_{(t,z)}^J \Psi(F) - \Psi'(F) D_{(t,z)}^J F)\nu(dz)dt\right]$$

   が成立する.

系として得られる不等式

連鎖率から

$$D_t^W F^2 = 2FD_t^W F$$

であることがわかる. したがって, (4) から,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}[F^2] &\leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F^2}|D_t^W F^2|^2 dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F^2} 4F^2 |D_t^W F|^2 dt\right] \\ &= 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |D_t^W F|^2 dt\right] = 2\mathcal{E}(F,F)\end{aligned}$$

を得る.

系として得られる不等式

Corollary 5.2

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ が確率 1 で $F > 0$ をみたすとする．このとき，

$$\mathrm{Ent}[F] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} \frac{1}{F}|D_{t,z}F|^2 q(dt,dz)\right]$$

が成立する.

Corollary 5.3

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ が確率 1 で $F > 0$ をみたすとき，

$$\mathrm{Ent}[F] \leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F}|D_{t,0}F|^2 dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} (D_{t,z}F \cdot D_{t,z}\log F) z^2 \nu(dz) dt\right].$$

系として得られる不等式

Corollary 5.2 と Corollary 5.3 から, 次の事がわかる.

Corollary 5.4

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ が確率 1 で $F > 0$ をみたすとき,

$$\mathrm{Ent}[F] \leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{1}{F}|D_{t,0}F|^2 dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \min\left\{D_{t,z}F \cdot D_{t,z}\log F, \frac{1}{F}|D_{t,z}F|^2\right\} z^2 \nu(dz)dt\right]$$

が成り立つ.

Remark 5.5

Corollary 5.2 から, *Proposition 3.1* も導出できる.

さらに次の不等式も導かれる:

Corollary 5.6

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ が次をみたすとする：

1. $e^F \in L^2(\mathbb{P})$,
2. $e^F D_{t,z}F \mathbf{1}_{\{0\}}(z) + \frac{e^F(e^{zD_{t,z}F} - 1)}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \in L^2(q \times \mathbb{P})$,
3. $Fe^F \in L^2(\mathbb{P})$,
4. $\frac{e^F(Fe^{zD_{t,z}F} + zD_{t,z}F \cdot Fe^{zD_{t,z}F} - F)}{z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_0}(z) \in L^2(q \times \mathbb{P})$.

このとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ent}[e^F] \leqslant \frac{1}{2}\sigma^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T e^F |D_{t,0}F|^2 dt\right] \\ + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} e^F(zD_{t,z}F \cdot e^{zD_{t,z}F} - e^{zD_{t,z}F} + 1)\nu(dz)dt\right] \end{aligned} \tag{5}$$

が成立する.

測度集中の不等式

本節では, Corollary 5.6 と Herbst を用いて測度集中の不等式を紹介する.

Theorem 6.1 (Sakuma-Suzuki (2018))

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ が

$$\sup_{(\omega,t,z)\in\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}_0} zD_{t,z}F = \beta \in (0,\infty), \tag{6}$$

$$\sup_{\omega\in\Omega} \sigma^2 \int_0^T |D_{t,0}F|^2 dt = \alpha^2 < \infty,$$

$$\sup_{\omega\in\Omega} \int_{[0,T]\times\mathbb{R}_0} |D_{t,z}F|^2 z^2 \nu(dz)dt = \gamma^2 < \infty \tag{7}$$

をみたすとき,

Theorem 6.1 の続き

各 $r > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) \\
&\leqslant \exp\left[-\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda r - \frac{\alpha^2\lambda^2}{2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2}(e^{\lambda\beta} - \lambda\beta - 1)\right\}\right] \qquad (8) \\
&= \exp\left[-\frac{r^2}{2\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{2\alpha^2\beta^2}\left(2\alpha^2 + 2\beta r + \gamma^2\right)\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{\alpha^2}{2\beta^2}\left(\mathbb{W}\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\exp\left\{\frac{\beta r + \gamma^2}{\alpha^2}\right\}\right)\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mathbb{W}\left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\exp\left\{\frac{\beta r + \gamma^2}{\alpha^2}\right\}\right)\right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ． ただし $\mathbb{W}$ は Lambert の W 関数である．Lambert W 関数 $\mathbb{W}(x)$ は方程式 $ye^y = x$ $(x \in \mathbb{R})$ の解 y を表す．

Theorem 6.1 の続き

特に $zD_{t,z}F \leqslant 0$ をみたすときは

$$\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) \leqslant \exp\left[-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right] \tag{10}$$

が任意の $r > 0$ について成立する．これは，Wiener 空間のケースと同じである．

Remark 6.2

1. $\nu = 0$ かつ $\sigma \neq 0$ であるときは，$\gamma \to 0$ とできるので, *(9)* から,

$$\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) \leqslant \exp\left[-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right], \forall r > 0$$

がわかる *(Wiener* 空間のケースと同じ*)*

2. $\nu \neq 0$ かつ $\sigma = 0$ のときは，$\alpha \to 0$ とすることができるので，*(8)* より

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) &\leqslant \exp\left[-\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda r - \frac{\gamma^2}{\beta^2}(e^{\lambda\beta} - \lambda\beta - 1)\right\}\right] \\ &= \exp\left[-\left(\frac{r}{\beta} + \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\log\left(1 + \frac{\beta r}{\gamma^2}\right) + \frac{r}{\beta}\right] \\ &\leqslant \exp\left[-\frac{r}{2\beta}\log\left(1 + \frac{\beta r}{\gamma^2}\right)\right] \qquad (11)\end{aligned}$$

となる *(Wu (2000)* と同じ結果*)*.

Remark 6.2 の続き

さらに, $zD_{t,z}F \leqslant 0$ のとき, (11) で $\beta \to 0$ とすることにより,

$$\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] > r) \leqslant \exp\left[-\frac{r^2}{2\gamma^2}\right].$$

を得る.

今後の課題

今後の課題

1. $\mathbb{P}(F - \mathbb{E}[F] < -r) \leqslant ?, \forall r > 0$
2. U-統計量，ファイナンスへの応用，数値解析
3. 加法過程に対する対数 Sobolev 不等式
(Di Nunno-Vives (2017) や Vives (2019) の Malliavin 解析等を応用)
4. 多様体上の Lévy 過程 (Applebaum(2001) 等) に対する Clark-Ocone の公式，対数 Sobolev 不等式，Poincare の不等式等
5. 自由確率論版の Malliavin 解析ではどうなるのか？
6. 非整数 Lévy 過程の Malliavin 解析ではどうなるのか？

文献紹介

文献紹介 1

Wiener 過程に対する Malliavin Calculus

- D. Nualart, The Malliavin Calculus and Related Topics (Probability and Its Applications), Springer, 2006.
- D. Nualart, Malliavin Calculus and Its Applications (CBMS Regional Conference Series in Mathematics), AMS, 2009.
- M. Sanz-Sole, Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations, EPFL Press, 2005.
- I. Shigekawa, Stochastic Analysis, AMS, 1999.
- 重川一郎『確率解析』岩波書店, 2008.
- 伊藤清 (監修), 渡辺信三, 重川一郎 (編)「確率論ハンドブック」丸善, 2012. の 8 章.

文献紹介 2

ジャンプ過程に対する Malliavin Calculus

- G. Di Nunno, B. Øksendal and F. Proske, Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance, Springer, 2009.
- G. Di Nunno and J. Vives, A Malliavin-Skorohod calculus in L^0 and L^1 for additive and Volterra-type processes, *Stochastics* **89** (2017), no.1, 142–170.
- Y. Ishikawa, Stochastic Calculus of Variations: For Jump Processes (De Gruyter Studies in Mathematics), De Gruyter, 2016.
- G. Peccati and M. Reitzner (eds.), Stochastic Analysis for Poisson Point Processes: Malliavin Calculus, Wiener-Itô Chaos Expansions and Stochastic Geometry (Bocconi & Springer Series), Springer, 2016.
- N. Privault, Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings: With Normal Martingales (Lecture Notes in Mathematics), Springer, 2009.

文献紹介 3

近刊

- D. Nualart and E. Nualart, Introduction to Malliavin Calculus (Institute of Mathematical Statistics Textbooks), Cambridge University Press, 2018.
- J. Vives, Malliavin-Skorohod Calculus for Additive Processes with Applications to Finance (Chapman & Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics) , Chapman and Hall/CRC, 2019.

終演

ご清聴ありがとうございました!

Thank you for listening!