# Stochastic Lipshitz BSDE の $L^p$ 解とその線形解近似

永山　義基

大阪大学基礎工学研究科

August 12, 2018

# はじめに

## BSDE とは

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{1}$$

i.e.

$$Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s^* dW_s. \tag{2}$$

- $W = (W^1, \ldots, W^n)$ は $\mathbb{R}^n$-値標準ブラウン運動,
  $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ は通常の条件を満たすブラウンフィルトレーション.
- $\tau \in [0, T]$ は horizon time を表す有界な $(\mathcal{F}_t)$ -停止時刻.
- $Y$ は $\mathbb{R}^d$-値連続適合過程，$Z$ は $\mathbb{R}^{n\times d}$-値連続適合過程.
- この BSDE のことを $(f, \xi, \tau)$ と呼ぶ.

## 線形な場合の知られた事実

$(\eta, \theta)$ はそれぞれ有界な $\mathbb{R}$-値可予測過程と $\mathbb{R}^{n\times 1}$-値可予測過程とする．また，$\phi$ は $\mathbf{E}\left[\int_0^\tau |\phi_s|^2 ds\right] < \infty$ を満たすとする．このとき，

$$\begin{cases} -dY_t = [Y_t\eta_t +, Z_t^*\theta_t + \phi_t]dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{3}$$

について，この解 $(Y, Z)$ は一意に定まりそれぞれ，
$\mathbf{E}\left[\int_0^\tau |Y_s|^2 ds\right] < \infty$,$\mathbf{E}\left[\int_0^\tau |Z_s|^2 ds\right] < \infty$ を満たす．さらに

$$Y_t = \mathbf{E}\left[\Gamma_\tau^t \xi + \int_{t\wedge\tau}^\tau \Gamma_u^t \phi_u du \middle| \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right], \ \mathbf{P}\text{-a.s.}.$$

となる．ここで，$\{\Gamma_s^t\}_{s\geq t}$ は次の FSDE の解である：

$$\begin{cases} d\Gamma_s^t = \Gamma_s^t(\eta_s ds + \theta_s^* dW_s), \\ \Gamma_t^t = 1. \end{cases} \tag{4}$$

# はじめに

## 背景

- $(\eta, \theta)$ はそれぞれ金利率とリスクプレミアムを表す過程として見なすことができ，ファイナンスにおける意味を持つ．
- 一方で，よく知られている金利モデル過程は有界でない．

## 目的

- $(\eta, \theta)$ が有界でない場合でも解を求め，ファイナンスでの応用をしたい．
- ついでに，条件や解の二乗可積分性も拡張したい．

# Contents

# 種々の仮定と定義

## 仮定

(A1). ある定数 $T$ が存在して，$\tau \leq T < \infty$,　$\mathbf{P}$-a.s.

(A2). それぞれ非負の $\mathbb{R}$-値適合過程 $\mu_t,\gamma_t$ が存在して次が成り立つ：任意の $(y^1, z^1)$，$(y^2, z^2)$ に対して，

$$|f(\omega, t, y^1, z^1) - f(\omega, t, y^2, z^2)| \leq \mu_t |y^1 - y^2| + \gamma_t |z^1 - z^2|,$$

ここでは，この適合過程 $\mu_t,\gamma_t$ をリプシッツ関数と呼ぶことにする．

## 定義

- $\alpha = \{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ : $\alpha_t = \sqrt{\mu_t + \gamma_t^2}$
- $a = \{a_t^{(m)}\}_{t \geq 0}$ : $a_t^{(m)} = \sqrt{m}\alpha_t$
- $A = \{A_t\}_{t \geq 0}$ : $A_t = \int_0^t \left(a_s^{(m)}\right)^2 ds$

# 種々の仮定と定義

$p > 1, \beta > 0, m \geq 1$ に対し，$e^{\beta A_t} = e^{m\beta \int_0^t \alpha_s^2 ds}$ に注意して次を定義する．

## 定義

- $\mathcal{L}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) := \left\{ \xi : \mathcal{F}_\tau \text{可測}; \mathbb{R}^d \text{値} \,\middle|\, ||\xi||_{\mathcal{L}}^p := \mathbf{E}\left[ (e^{\beta A_\tau} |\xi|^2)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty \right\}$,
- $\mathcal{A}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) := \left\{ \{Y_t\}_{t\geq 0} : \text{発展的可測}; \mathbb{R}^d \text{値} \,\middle|\, ||Y||_{\mathcal{A}}^p := \mathbf{E}\left[ \int_0^\tau (e^{\beta A_s} |Y_s|^2)^{\frac{p}{2}} dA_s \right] < \infty \right\}$,
- $\mathcal{S}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) := \left\{ \{Y_t\}_{t\geq 0} : \text{発展的可測}; \mathbb{R}^d \text{値} \,\middle|\, ||Y||_{\mathcal{S}}^p := \mathbf{E}\left[ \sup_{0\leq s\leq \tau} (e^{\beta A_s} |Y_s|^2)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty \right\}$,
- $\mathcal{M}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^{n\times d}) := \left\{ \{Z_t\}_{t\geq 0} : \text{発展的可測}; \mathbb{R}^{n\times d} \text{値} \,\middle|\, ||Z||_{\mathcal{M}}^p := \mathbf{E}\left[ \left( \int_0^\tau e^{\beta A_s} |Z_s|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \right] < \infty \right\}$,
- $\mathcal{B}^p(\alpha, m\beta, \tau) := \left[ \mathcal{A}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) \right] \times \mathcal{M}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^{n\times d})$, これに，$||(Y, Z)||_{\mathcal{B}}^p := ||Y||_{\mathcal{A}}^p + ||Y||_{\mathcal{S}}^p + ||Z||_{\mathcal{M}}^p$ というノルムを導入する．

# 種々の仮定と定義

## 仮定

(A3). $\alpha_t^2 > 0, \mathbf{P} \otimes dt$-a.e.

(A4). $\frac{f_0}{a} = \left\{ \frac{f(t,0,0)}{a_t^{(m)}} \right\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$.

(A5). $\xi \in \mathcal{L}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$.

(A6). $p \geq 2$ のとき，$A_\tau < \infty, \mathbf{P}$-a.s.,
$p \in (1, 2)$ のとき，ある定数 $L$ が存在して $A_\tau < L, \mathbf{P}$-a.s.

# 種々の仮定と定義

## 定義

1. $(Y, Z)$ が $(f, \xi, \tau)$ の解であるとは次を満たすことである：
   - $(Y, Z)$ は発展的可測で，$\{\tau \le t\}$ 上で $\mathbf{P}$-a.s. に $Y_t = \xi, Z_t = 0$ を満たす．
   - $\int_0^\tau |Z_s|^2 ds < \infty$, $\mathbf{P}$-a.s..
   - $\int_0^\tau |f(s, Y_s, Z_s)| ds < \infty$, $\mathbf{P}$-a.s..
   - $Y_t = \xi + \int_{t\wedge\tau}^\tau f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_{t\wedge\tau}^\tau Z_s^* dW_s$, $\mathbf{P}$-a.s..
2. $\forall m \ge 1, \forall \beta > 0$ に対し，$(f, \xi, \tau)$ の解 $(Y, Z)$ が $(\alpha, m\beta)$-解であるとは次を満たすことである：
   - $(Y, Z)$ は発展的可測で，$\{\tau \le t\}$ 上で $\mathbf{P}$-a.s. に $Y_t = \xi, Z_t = 0$ を満たす．
   - $\int_0^\tau e^{\frac{1}{2}\beta A_s} |f(s, Y_s, Z_s)| ds < \infty$, $\mathbf{P}$-a.s..
   - $\int_0^\tau e^{\frac{1}{2}\beta A_s} |Y_s| dA_s < \infty$, $\mathbf{P}$-a.s..
   - $\int_0^\tau (e^{\frac{1}{2}\beta A_s} |Z_s|)^2 ds < \infty$, $\mathbf{P}$-a.s..
3. $\forall p > 1, \forall m \ge 1, \forall \beta > 0$ に対し，$(f, \xi, \tau)$ の解 $(Y, Z)$ が $L^p(\alpha, m\beta)$-解であるとは次を満たすことである：
   - $(Y, Z) \in \mathcal{B}^p(\alpha, m\beta, \tau)$

注．任意の $p$,$\beta$,$m$ に対し，(A2)(A3)(A4)(A6) の下で，$(f, \xi, \tau)$ の解 $(Y, Z)$ が $L^p(\alpha, m\beta)$-解ならば，$(\alpha, m\beta)$-解である．

# アプリオリ評価

## 命題 (アプリオリ評価)

$p \geq 2$ のとき，$\forall m \geq 1, \forall \beta \geq 3$ に対し，(A2)(A3)(A4)(A5)(A6) の仮定の下で，$(Y, Z)$ が $(f, \xi, \tau)$ の $(\alpha, m\beta)$-解でかつ，
$Y \in \mathcal{A}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$ とする．このとき，$p$ と $\beta$ にのみ依存する定数 $C_{p,\beta}$ が存在して次を満たす：

$$||(Y, Z)||_{\mathcal{B}}^p \leq C_{p,\beta}\left(||\xi||_{\mathcal{L}}^p + ||\frac{f_0}{a}||_{\mathcal{M}}^p\right).$$

また，$p \in (1, 2)$ に対しても，$m \geq 1, \beta \geq \frac{2}{p-1} + \frac{4(p-1)}{p^2}$ ならば，$C_{p,\beta}$ を $p$ と $\beta$ と $L$ にのみ依存する定数 $C_{p,\beta,L}$ と置き換えた同様の結果が得られる．

# アプリオリ評価

## 命題 (アプリオリ評価 2)

$p \geq 2$ のとき，$\forall m \geq nd, \forall \beta \geq 3$ に対し，(A2)(A3)(A4)(A5)(A6) の仮定の下で，$(Y^i, Z^i)_{i=1,2}$ が $(f^i, \xi^i, \tau)_{i=1,2}$ の $(\alpha, m\beta)$-解でかつ，
$\left\{ \frac{\delta_2 f_t}{a_t^{(m)}} \right\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$,
$Y^i \in \mathcal{A}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$ とする．このとき，$p$ と $\beta$ にのみ依存する定数 $C_{p,\beta}$ が存在して次を満たす：

$$||(\delta Y, \delta Z)||_{\mathcal{B}}^p \leq C_{p,\beta} \left( ||\delta Y_\tau||_{\mathcal{L}}^p + ||\frac{\delta_2 f}{a}||_{\mathcal{M}}^p \right).$$

ここで，
$\delta Y := Y^1 - Y^2, \delta Z := Z^1 - Z^2, \delta_2 f_t := f^1(t, Y_t^2, Z_t^2) - f^2(t, Y_t^2, Z_t^2)$
とおいた．
また，$p \in (1, 2)$ に対しても，$m \geq nd, \beta \geq \frac{2}{p-1} + \frac{4(p-1)}{p^2}$ ならば，$C_{p,\beta}$ を $p$ と $\beta$ と $L$ にのみ依存する定数 $C_{p,\beta,L}$ と置き換えた同様の結果が得られる．

# 解の一意存在性

## 補題

$p=2$ とする．$m\beta$ が十分大きいとき，(A1)(A2)(A3)(A4)(A5) の仮定の下で，$(f,\xi,\tau)$ の解 $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2(\alpha,m\beta,\tau)$ が一意に存在する．

## 補題

$\forall p\geq 2, \forall m\geq 1, \forall\beta\geq 3$ に対し，(A1)(A2)(A3) の仮定の下で，$(Y,Z)$ は $(f,\xi,\tau)$ の $L^2(\alpha,m\beta)$-解とし，$(f,\xi,)$ は次を満たすとする：

$$\sup_{0\leq t\leq\tau}\left\{e^{\frac{1}{2}\beta A_t}\left|\frac{f(t,0,0)}{a_t^{(m)}}\right|\right\}\leq {}^{\exists}K,\quad e^{\frac{1}{2}\beta A_\tau}|\xi|\leq K,\quad \mathbf{P}\text{-a.s..}$$

このとき，$Y\in\mathcal{A}^p(\alpha,m\beta,\tau,\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{S}^p(\alpha,m\beta,\tau,\mathbb{R}^d)$ となる．
また，$p\in(1,2)$ に対しても，(A6) も仮定すれば同様の結果が得られる．

# 解の一意存在性

**定理**

$\forall p > 1$ に対し，$m\beta$ が十分大きいとき，(A1)(A2)(A3)(A4)(A5)(A6) の仮定の下で，$(f, \xi, \tau)$ の解 $(Y, Z) \in \mathcal{B}^p(\alpha, m\beta, \tau)$ が一意に存在する．

# 主結果

$q$ は $1/p + 1/q = 1$ を満たす実数とする.

## 命題

$\forall p > 1, m\beta > 2 \vee (q-1) \vee q^2$ とし，$\eta$ は $\mathbb{R}$-値適合過程，$\theta$ は $\mathbb{R}^{n\times 1}$-値適合過程とする．(A1)(A3)(A5)(A6) の仮定の下で，

$$\begin{cases} -dY_t = [Y_t\eta_t +, Z_t^*\theta_t + \phi_t]dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{5}$$

について，$\phi \in \mathcal{M}^p(\alpha, m\beta, \tau, \mathbb{R}^d)$ とする．このとき，

$$Y_t = \mathbf{E}\left[\Gamma_\tau^t \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} \Gamma_u^t \phi_u du \Big| \mathcal{F}_{t\wedge\tau}\right], \ \mathbf{P}\text{-a.s..}$$

となる．ここで，$\{\Gamma_s^t\}_{s\geq t}$ は次の FSDE の解である：

$$\begin{cases} d\Gamma_s^t = \Gamma_s^t(\eta_s ds + \theta_s^* dW_s), \\ \Gamma_t^t = 1. \end{cases} \tag{6}$$

# 主結果

$f^0$ を線形な関数とし，$\epsilon \in [0,1]$ として，
$f(t,y,z) = f^0(t,y,z) + \epsilon g(t,y,z)$ とする．

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -dY_t = f^0(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} -dY_t = [f^0(t,Y_t,Z_t) + \epsilon g(t,Y_t^0,Z_t^0)]dt - Z_t^* dW_t, \\ Y_\tau = \xi. \end{cases} \tag{9}$$

の各 $L^p(\alpha, m\beta)$-解をそれぞれ $(Y,Z)$,$(Y^0,Z^0)$,$(Y^1,Z^1)$ とする．

# 主結果

## 主結果

$\forall p > 1, m\beta > 3nd \vee (q-1) \vee q^2$ とし,
(A1)(A2)(A3)(A4)(A5)(A6) を仮定する.
$||(Y - Y^0, Z - Z^0)||_{\mathcal{B}} = O(\epsilon), ||(Y - Y^1, Z - Z^1)||_{\mathcal{B}} = O(\epsilon^2)$ となる.

# まとめ

- ある意味での p 乗可積分な解の一意存在性を示せた.
- 線形な方程式の解が陽に求まることを示した.
- またその性質を用いて,(ファイナンスにおいて出現する) 特殊な例での解の近似ができた.

# 参考文献


- (ElKaroui-Peng-Quenez)BSDE in Finance.
- (Wang)$L^p$ solution of BSDE with Lipshitz Condition.
- (Takahashi,Yamada)An Asymptotic Expansion of Forward-Backward SDEs with a Peturbed driver.
- (Gobet)Analytical approximations of BSDEs with non-smooth driver.